安徽师范大学2006－2007学年第一学期

数学与应用数学专业《近世代数》期末考试答案(A)(时间120分钟)

答案及评分细则

题　号	一	二	三	四	总分
得　分					

得分	评卷人	复核人

一、填空题(每空2分,共20分).

1. 设有集合$A, B, |A| = 3, |B| = 2$, 则可以定义__8__个从A到B的映射,其中有__6__个是满射,__0__个是单射.

2. 设群G的阶是p^m,其中p是素数,m是正整数,则G的真子群的一切可能的阶是__$1, p, p^2, \ldots, p^{m-1}$__.

3. 设$G = (a)$是循环群,则G与模n的剩余类加群同构的充要条件是__$\circ(a) = n$(或$|G| = n$)__.

4. 设H是群G的子群,$a, b \in G$,则$Ha = Hb$的充要条件是__$ba^{-1} \in H$(或$ab^{-1} \in H$等)__

5. 一个有限非可换群至少含有__6__个元素.

6. 设G是阶为n的交换群,a是G的$m(\leq n)$阶元,则群$G/(a)$的阶等于__$\frac{n}{m}$__.

7. 实数域$\mathbb{R}$的理想有__2__个.

8. 剩余类环$\mathbb{Z}_6$的子环$S = \{[0], [2], [4]\}$,则S的单位元是__$[4]$__.

得分	评卷人	复核人

二、判断题(每小题2分,共20分).(对打“$\surd$”, 错打“$\times$”)

1. ($\times$) 规定实数集$\mathbb{R}$的元素间的关系R为:$\forall a, b \in \mathbb{R}, aRb$ 当且仅当$ab \geq 0$,则R是$\mathbb{R}$的元素间的等价关系.

2. ($\times$) 任何集合与它的一个真子集之间皆不能有一一映射存在.

学号______ 姓名:______ 年级/班级:______ 学院:______

装　订　线　内　请　不　要　答　题

3. ($\surd$) 若群G的每个元素都适合方程$x^2=e$,则G是交换群.

4. ($\surd$) 设G是循环群,N是G的子群,则G/N是循环群.

5. ($\times$) 群G的阶为n, d是n的一个因子, 则G一定有阶为d的子群.

6. ($\surd$) 模47的剩余类环$\mathbb{Z}_{47}$没有零因子.

7. ($\surd$) 设R是一个有单位元1的环,I是R的一个理想且$1\in I$, 则$I=R$.

8. ($\surd$) 如果环R满足左消去律,则R必定没有右零因子.

9. ($\times$) 设I和S都是环R的理想且$I\subseteq S\subseteq R$, 如果I是R的最大理想,则$S\neq\{0\}$.

10. ($\surd$) 若R是唯一分解环,则$R[x]$也是唯一分解环.

得分	评卷人	复核人

三、计算题(每小题10分共30分).

1.找出模12的剩余类加群的所有子群.

解. 由于模12的剩余类加群$\mathbb{Z}_{12}$子群的阶为12的因数, 所以模12的剩余类加群的子群的阶只可能为1,2,3,4,6,12. (4分)

$\mathbb{Z}_{12}$的1阶子群为$\{[0]\}$;. . . . . (1分)

$\mathbb{Z}_{12}$的2阶子群为$\{[0],[6]\}$; . . . . (1分)

$\mathbb{Z}_{12}$的3阶子群为$\{[0],[4],[8]\}$;. . . . . (1分)

$\mathbb{Z}_{12}$的4阶子群为$\{[0],[3],[6],[9]\}$; . . . . (1分)

$\mathbb{Z}_{12}$的6阶子群为$\{[0],[2],[4],[6],[8],[10]\}$; . . . . (1分)

$\mathbb{Z}_{12}$的2阶子群为$\mathbb{Z}_{12}$. . . . . (1分)

2.设$f(x)=3x^3+5x-4, g(x)=4x^2-x+3$ 均为$\mathbb{Z}_8[x]$中的多项式,在$\mathbb{Z}_8[x]$中计算$f(x)+g(x), f(x)-g(x)$与$f(x)g(x)$并求出它们的次数.

解. $f(x)+g(x)=3x^3+4x^2+4x-1$,其次数为3; . . . . (3分)

$f(x)-g(x)=3x^3-4x^2+6x-7$,其次数为3; . . . . (3分)

$f(x)g(x)=4x^5-3x^4+5x^3-5x^2+3x-4$,其次数为5. . . . . . . (4分)

3.求$\mathbb{Z}_{16}[x]$中的方程$x^2=0$的根.

解. $[a]$为方程$x^2=0$的根的充要条件是$4|a$. . . . . (5分)

所以,方程$x^2=0$的根为$[0],[4],[8],[12]$. . . . . (5分)

得分	评卷人	复核人

四、证明题(每小题10分共30分).

1. 设a, b分别是群G的3阶和5阶元,且$ab = ba$, 证明：ab的阶是15.

证. 设$|ab| = k$,由于$(ab)^{15} = a^{15}b^{15} = e$,所以$k|15$. .... (3分)

由$a^{5k} = a^{5k}b^{5k} = (ab)^{5k} = e$,得$3|5k$,而$(3, 5) = 1$,所以$3|k$. ..... (4分)

同理可得$5|k$,再由$(3, 5) = 1$得$(3 \cdot 5)|k$.......................... (2分)

综上所得,$k = 15$,即ab的阶是15.............................. (1分)

装 订 线 内 请 不 要 答 题

2. 证明: 有理数域$\mathbb{Q}$是所有复数$a+bi(a,b\in\mathbb{Q})$ 作成的域$\mathbb{Q}(i)$的唯一真子域.

证. $\mathbb{Q}$显然是$\mathbb{Q}(i)$的一个真子域. . . . . (1分)

设F是$\mathbb{Q}(i)$的任一子域,则$0,1\in F$,于是对$\forall p,q(\neq 0)\in\mathbb{Z}$,有$p,q,\dfrac{p}{q}\in F$,即$\mathbb{Q}\subseteq F$. . . . . (4分)

若$F\neq\mathbb{Q}$,则有$a+bi\in F$,其中$a,b(\neq 0)\in\mathbb{Q}$,于是$bi=(a+bi)-a\in F$, $i=b^{-1}bi\in F$,即$F=\mathbb{Q}(i)$. . . . . (4分)

所以$\mathbb{Q}$是$\mathbb{Q}(i)$的惟一真子域. . . . . (1分)

3. 设R是主理想环,$a(\neq 0) \in R$. 证明: 在R中有且仅有有限个理想包含a.

证. 如果a是R的单位,则对R的任一理想I,若$a \in I$, 则$1 = a^{-1}a \in I$,所以$I = R$,即只有R包含a,结论成立.............................(2分)

若$a(\neq 0)$不是单位,则由主理想环是惟一分解环可知a有分解$a = p_1 p_2 \cdots p_n$,其中p_i为素元...(4分)

所以,$b|a \Leftrightarrow b = \varepsilon p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_s}, 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.其中$\varepsilon$是单位(当$k = 0$时, $b = \varepsilon$)..(2分)

又由于$a \in (b) \Rightarrow b|a$,所以,包含$a$的$R$的理想最多有$2^n$个......(2分)