

安徽师范大学2006—2007学年第一学期

数学与应用数学专业《近世代数》期末考试试卷(B)(时间120分钟)

题号	一	二	三	四	总分
得分					

得分	评卷人	复核人

一、填空题(每空2分,共20分)

1. 如果 \sim 是集合 A 的元间的一个等价关系,在这个等价关系下, $[a], [b]$ 是两个等价类, $[a] = [b]$ 的充要条件是 _____, A 的元素 a 所在的等价类 $[a] = _____.$
2. 规定 \mathbb{R} 的运算 \circ 为: $a \circ b = 2ab$ (等号右边的运算是普通乘法), 则对于结合律和交换律而言,这个运算满足 _____.
3. n 次对称群 S_n 的阶是 _____.
4. 一个有限非可换群至少含有 _____ 个元素.
5. 设 $G = (a)$ 是6阶循环群, 除了 G 本身外它还有3个子群, 它们是 _____, _____, _____.
6. 在 $\mathbb{Z}_8[x]$ 中, 方程 $x^2 = \bar{1}$ 的所有根为 _____.
7. 若 I 是有单位元的环 R 的由 a 生成的主理想, 那么 I 中的元素可以表示为 _____.

得分	评卷人	复核人

二、判断题(每小题2分,共20分)(对打“√”, 错打“×”)

1. () 任何集合与它的一个真子集之间皆不能有一一映射存在.
2. () 设 A, B, D 都是非空集合, 则 $A \times B$ 到 D 的每个映射都叫做二元运算.
3. () 如果群 G 的子群 H 是循环群, 那么 G 也是循环群.

4. () 设 N 是群 G 的不变子群, 则对 $\forall a \in G, \forall n \in N$, 有 $an = na$.
5. () 一个29阶群只有两个子群.
6. () 一个主理想环一定是一个唯一分解环, 但未必是欧氏环.
7. () 域 F 里的每一个元素皆有逆元.
8. () 有限整环是域.
9. () 有零因子环的同态象可能没有零因子.
10. () 若 R 是唯一分解环, 则 $R[x]$ 也是唯一分解环.

得分	评卷人	复核人

三、计算题(每小题10分,共30分)

1. 找出模15的剩余类加群的所有子群.

2. 设 $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ 是模6的剩余类环, 且 $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_6[x]$,
如果

$$f(x) = \bar{3}x^3 + \bar{5}x + \bar{2}, \quad g(x) = \bar{4}x^2 + \bar{5}x + \bar{3},$$

计算 $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$.

3. 整环 I 刚好包含所有可以写成

$$\frac{m}{2^n} (m \text{是任意整数}, n \text{是非负整数}).$$

形式的有理数, 那么 I 中哪些元是单位, 哪些元是素元?

得分	评卷人	复核人

四、证明题(每小题10分,共30分)

1. 设 G 是群, a, b 是 G 中任意两个元, 则 ab 的阶与 ba 的阶相同.

2. 假定 I 是一个整环, (a) 和 (b) 是 I 的两个主理想, 证明: $(a) = (b)$ 当且仅当 a 是 b 的相伴元.

3. 设 $A = (2+i)$ 是高斯整数环 $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ 的理想, \mathbb{Z}_5 是模 5 剩余类环, 证明 $\mathbb{Z}[i]/A$ 是域且 $\mathbb{Z}[i]/A \cong \mathbb{Z}_5$.