



4. ( ) 设  $N$  是群  $G$  的不变子群, 则对  $\forall a \in G, \forall n \in N$ , 有  $an = na$ .
5. ( ) 一个 29 阶群只有两个子群.
6. ( ) 一个主理想环一定是一个唯一分解环, 但未必是欧氏环.
7. ( ) 域  $F$  里的每一个元素皆有逆元.
8. ( ) 有限整环是域.
9. ( ) 有零因子环的同态象可能没有零因子.
10. ( ) 若  $R$  是唯一分解环, 则  $R[x]$  也是唯一分解环.

得分	评卷人	复核人

三、计算题(每小题 10 分, 共 30 分)

1. 找出模 15 的剩余类加群的所有子群.

2. 设  $\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$  是模6的剩余类环, 且  $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_6[x]$ , 如果

$$f(x) = \bar{3}x^3 + \bar{5}x + \bar{2}, \quad g(x) = \bar{4}x^2 + \bar{5}x + \bar{3},$$

计算  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ .

3. 整环 $I$ 刚好包含所有可以写成

$$\frac{m}{2^n} \text{ (} m \text{ 是任意整数, } n \text{ 是非负整数).}$$

形式的有理数, 那么 $I$ 中哪些元是单位, 哪些元是素元?

装 订 线 内 请 不 要 答 题

得分	评卷人	复核人

四、证明题(每小题10分,共30分)

1. 设 $G$ 是群,  $a, b$ 是 $G$ 中任意两个元, 则 $ab$ 的阶与 $ba$ 的阶相同.

2. 假定 $I$ 是一个整环,  $(a)$ 和 $(b)$ 是 $I$ 的两个主理想, 证明: $(a) = (b)$ 当且仅当 $a$ 是 $b$ 的相伴元.

3. 设  $A = (2+i)$  是高斯整数环  $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  的理想,  $\mathbb{Z}_5$  是模5剩余类环, 证明  $\mathbb{Z}[i]/A$  是域且  $\mathbb{Z}[i]/A \cong \mathbb{Z}_5$ .