学院：________ 年级/班级：________ 姓名：________ 学号________

装订线内请不要答题

安徽师范大学2006－2007学年第一学期

数学与应用数学专业《近世代数》期末考试答案(B)(时间120分钟)

题 号	一	二	三	四	总分
得 分					

得分	评卷人	复核人

一、填空题(每空2分,共20分)

1. 如果$\sim$是集合A的元间的一个等价关系,在这个等价关系下,$[a]$, $[b]$ 是两个等价类,$[a]=[b]$当且仅当 $a\sim b$,A的元素a所在的等价类$[a]=$ $\{x\in A|x\sim a\}$.

2. 规定$\mathbb{R}$的运算$\circ$为:$a\circ b=2ab$(等号右边的运算是普通乘法),则对于结合律和交换律而言,这个运算满足 结合律、交换律 .

3. n次对称群S_n的阶是 $n!$.

4. 一个有限非可换群至少含有 6 个元素.

5. 设$G=(a)$是6阶循环群，除了G本身外它还有3个子群，它们是 $\{e\}$ ， (a^2) ， (a^3) .

6. 在$\mathbb{Z}_8[x]$中，方程$x^2=\bar{1}$的所有根为 $\bar{1},\bar{3},\bar{5},\bar{7}$.

7. 若I是有单位元的环R的由a生成的主理想, 那么I中的元素可以表示为 $\{\sum x_i a y_i|$诸$x_i,y_i\in R\}$.

得分	评卷人	复核人

二、判断题(每小题2分,共20分)(对打“$\surd$”, 错打“$\times$”)

1. ($\times$) 任何集合与它的一个真子集之间皆不能有一一映射存在.

2. ($\times$) 设A,B,D都是非空集合, 则$A\times B$到D的每个映射都叫做二元运算.

3. ($\times$) 如果群G的子群H是循环群,那么G也是循环群.

4. (×) 设N是群G的不变子群,则对$\forall a \in G, \forall n \in N$,有$an = na$.

5. (√) 一个29阶群只有两个子群.

6. (√) 一个主理想环一定是一个唯一分解环，但未必是欧氏环.

7. (×) 域F里的每一个元素皆有逆元.

8. (√) 有限整环是域.

9. (√) 有零因子环的同态象可能没有零因子.

10. (√) 若R是唯一分解环,则$R[x]$也是唯一分解环.

得分	评卷人	复核人

三、计算题(每小题10分,共30分)

1.找出模15的剩余类加群的所有子群.

解.由于循环群的子群是循环群, ... 2分

故容易计算得：

$(\bar{1}) = (\bar{2}) = (\bar{4}) = (\bar{7}) = (\bar{8}) = (\overline{11}) = (\overline{13}) = (\overline{14}) = \mathbb{Z}_{15}$ 4分

$(\bar{3}) = (\bar{6}) = (\bar{9}) = (\overline{12}) = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}\}$ 6分

$(\bar{5}) = (\overline{10}) = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}\}$ 8分

$(\bar{0}) = \{\bar{0}\}$ 10分

2. 设$\mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$是模6的剩余类环, 且$f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_6[x]$, 如果

$$f(x) = \bar{3}x^3 + \bar{5}x + \bar{2},\ g(x) = \bar{4}x^2 + \bar{5}x + \bar{3},$$

计算$f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$.

解.$f(x) + g(x) = \bar{3}x^3 + \bar{4}x^2 + \bar{4}x + \bar{5}$, ... (3分)

$f(x) - g(x) = \bar{3}x^3 + \bar{2}x^2 + \bar{5}$, ... (6分)

$f(x)g(x) = \bar{3}x^4 + \bar{5}x^3 + \bar{3}x^2 + x$. .... (10分)

3. 整环I刚好包含所有可以写成

$$\frac{m}{2^n}(m\text{是任意整数}, n\text{是非负整数}).$$

形式的有理数，那么I中哪些元是单位,哪些元是素元？

解. $I=\{2^i u | i\text{是整数}, u\text{是奇数}\}$ ....(1分)

(i)设$\varepsilon=2^i u$是I的一个单位,则存在ε^{-1}使$\varepsilon^{-1}\cdot 2^i u=1$.

于是$\varepsilon^{-1}=2^{-i}u^{-1}, u=\pm 1, \varepsilon=\pm 2^i$ ....(3分)

反之,设$\varepsilon=\pm 2^i$(i是整数),则$\pm 2^{-i}$是ε在I中的逆元............(4分)

故I的单位是一切可以写成$\pm 2^i$(i是整数)形式的元...........(5分)

(ii)若$u=u_1u_2$,其中u_1, u_2皆为不等于± 1的奇数,

由(i)得u_1, u_2皆不是I的单位,故u不是I的素元................(7分)

若奇数u是奇数,$u=(2^{i_1}u_1)(2^{i_2}u_2)=2^{i_1+i_2}u_1u_2$, u_1, u_2是奇数,

则必有$i_1+i_2=0, u=u_1u_2$.

于是由u是素数,u_1, u_2中必然有一个是± 1,而$2^{i_1}u_1, 2^{i_2}u_2$中必然有一个是I的单位, 故u是I的素元...(9分)

从而I的素元是一切可以写成$\pm 2^i u$(其中u是素数)形式的元. (10分)

装 订 线 内 请 不 要 答 题

得分	评卷人	复核人

四、证明题(每小题10分,共30分)

1. 设G是群，a, b是G中任意两个元, 则ab的阶与ba的阶相同.

证明.设$\circ(ab) = n$,即$(ab)^n = e$. . . . . (2分)

于是$b(ab)^n = b, (ba)^n b = b$. . . . . (5分)

故$(ba)^n = e$得$\circ(ba) \leq n$ . . . . (7分)

类似可得$\circ(ab) \leq \circ(ba)$. . . . . (9分)

故ab的阶与ba的阶相同. . . . . (10分)

2. 假定I是一个整环,(a)和(b)是I的两个主理想,证明

$(a) = (b)$当且仅当a是b的相伴元.

证明.设$(a) = (b)$,那么$a \in (b)$,则$\exists s \in I$使得$a = sb$, ... (2分)

同样$\exists t \in I$使得$b = ta$,因而$a = sta$. . . . . (3分)

若$a = 0$则$b = 0$,b是a的一个相伴元. . . . . (4分)

若$a \neq 0$,则$st = 1$,t是一个单位而b也是a的一个相伴元. . . . . (5分)

设b是a的一个相伴元,那么$b = ta$, t是一个单位,于是$a = t^{-1}b$. (8分)

由此,$(b) \subseteq (a), (a) \subseteq (b), (a) = (b)$. . . . . (10分)

3. 设$A=(2+i)$是高斯整数环$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi|\ a,b\in\mathbb{Z}\}$的理想, $\mathbb{Z}_5$是模5剩余类环，证明$\mathbb{Z}[i]/A$是域且$\mathbb{Z}[i]/A\cong\mathbb{Z}_5$.

证明.设$M=(2+i)=\{(2+i)(a+bi)|a,b\in\mathbb{Z}\}$

$=\{(2a-b)+(a+2b)i|a,b\in\mathbb{Z}\}$ ....(1分)

易得$M=\{x+yi|x,y\in\mathbb{Z},2x+y\equiv 0 \mod 5\}$..............(3分)

设理想H真包含M, 则$\exists a+bi\in H\setminus M$,必有$2a+b\not\equiv 0 \mod 5$.

因而$(2a+b,5)=1$,于是有$s,t\in\mathbb{Z}$使$(2a+b)s+5t=1\in H$.

故$H=\mathbb{Z}[i]$,$M=(2+i)$是$\mathbb{Z}[i]$中的最大理想,$\mathbb{Z}[i]/A$是域.....(6分)

注意到$5=(2+i)(2-i)$且$a+bi\equiv a-2b \pmod{2+i}$......(8分)

故$\mathbb{Z}[i]/A=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4}\}$,其中$\bar{k}=k+(2+i)$.

易得$\mathbb{Z}[i]/A\cong\mathbb{Z}_5$...(10分)