“中国近现代科学技术发展综合研究项目”组织机构

学术顾问(以姓氏笔画为序):

王　元　华觉明　许良英　杜石然　吴文俊　何丙郁　张秉伦　陈美东
周光召　金　铎　柯　俊　郭书春　席泽宗　曹效业　路甬祥　潘吉星

首席科学家: 张柏春　王扬宗

专家组成员(以姓氏笔画为序):

王扬宗　刘　钝　张柏春　曹幸穗　董光璧　廖育群　樊洪业

办公室主任: 张　藜　**副主任:** 张九辰

《中国近现代科学技术史研究丛书》组织机构

丛书主编: 路甬祥

丛书副主编: 张柏春　王扬宗　董光璧　王渝生

丛书编委会委员(以姓氏笔画为序):

王扬宗　王克迪　王政芳　王渝生　艾素珍　田　淼　孙永大　曲安京
刘　钝　刘益东　刘佩华　刘戟锋　江晓原　关增建　李成智　李劲松
李兆华　杨　舰　邹大海　邹　健　宋正海　张九辰　张大庆　张志辉
张治中　张柏春　张　剑　张　藜　罗桂环　周嘉华　胡化凯　胡宗刚
胡维佳　赵　猛　夏玉棉　姜振寰　姚　远　袁向东　黄　晞　曹幸穗
梁　波　韩义华　韩健平　董光璧　鲁大龙　解　源　廖　克　廖育群
樊洪业　潘亚男

丛书常务编委会

主任: 张柏春　王扬宗

委员(以姓氏笔画为序):

王扬宗　王渝生　艾素珍　孙永大　刘　钝　张柏春　张　藜　曹幸穗
董光璧　鲁大龙　廖　克　廖育群　樊洪业

总 序

《中国近现代科学技术史研究丛书》是中国科学院知识创新工程项目“中国近现代科学技术发展综合研究”的成果，是百余位科技史专家、学者和研究生们辛勤劳动的结晶。

这也是中国科技界第一次有规模地对中国近现代科学技术发展的历程进行比较全面的、系统的、综合的研究。中国近现代科技史是中国近现代史的重要组成部分，研究中国近现代科技史对研究中国近现代史具有重要意义。立题时确定的目标是：系统地收集、抢救和整理中国近现代科学技术史实资料，建立完整的数据库，为中国近现代科技发展史研究积累基本资料；研究中国近现代科技发展历程中的重大事件、重要人物、历史文化背景及其对于中国经济社会文明进步的作用；对一些重要史实展开专题研究，力求取得新的认知和新的突破；科学地总结中国近现代科技发展历史的经验和教训，为新世纪中国科学技术的发展、创新能力的提高、创新体系的建设提供历史镜鉴；通过研究工作培养一批中青年科技史人才。

值得高兴的是，经过三年的努力，这些目标大都实现了。这套丛书是作者们奉献给读者的一份丰厚礼物，也将成为研究我国近现代科技史的宝贵资料。科技创新永无止境，科学技术史的研究也永无止境。我衷心希望读者和科技史界同仁能不吝批评，并在此基础上继续将我国近现代科学技术史研究推向前进，共同为全面建设小康社会，加快推进社会主义现代化建设做出贡献。

中国科学院院长 路甬祥

2003年6月5日

《中国近现代科学技术史研究丛书》出版前言

近代科学技术自19世纪传入中国以来，经历了一段非同寻常的曲折过程。从19世纪中叶自强运动中开始的“师夷之长技”，到20世纪初年的“科学救国”、“实业救国”思潮，从50年代的“向科学进军”，到20世纪末叶的“科教兴国”战略，中国人对科学技术给予了多少希望、梦想和憧憬！150年来，中国科学技术的进步是巨大的，但在全人类共同创建的现代科学技术大厦中，中国的贡献还很有限，中国科学技术的现代化还没有完成。站在新世纪的门槛上，中国应该如何发展科学技术，追赶国际先进水平，实现“科教兴国”的历史重任？面对这样重大的问题，我们不仅要深入了解和借鉴科学技术发达国家的经验，还必须深入研究中国近现代科学技术发展的历程及其与社会文化的关系，准确地把握科学技术的特性及其发展机制，总结中国近现代科学技术发展的历史经验和教训。

令人遗憾的是，我们在致力于解决眼前的科学和技术问题，追赶国际先进水平的时候，却很少系统地探讨和总结我国一二百年来科技发展的经验和教训。长期以来，我们对如何推进中国科学技术的进步、创造有利于科学技术发展的社会条件和文化氛围缺乏应有的认识。结果，我们不仅不易充分汲取历史的经验教训，反而可能重复旧的失当的政策和举措。因此，在面临重任和挑战的今天，系统地研究中国近现代科学技术发展史不但是学术研究的一项紧迫任务，也是现实赋予我们的重大课题。

大约15年前，中国科学院自然科学史研究所计划开展中国近现代科学技术发展史的研究工作。其主要成果就是董光璧先生主编《中国近现代科学技术史》和吴熙敬先生主编《中国近现代技术史》两部大型著作，分别由湖南教育出版社和科学出版社印行问世。在完成上述著作不久，自然科学史研究所又提出了系统地研究中国近现代科学技术史的大型研究计划，几经周折，终于在2000年列为中国科学院知识创新工程重要方向项目。“中国近现代科学技术发展综合研究”是一个跨越基础科学、应用科学、工程技术和人文社会科学等多学科的重要研究项目，主要包括专题研究、资料集与工具书、中国近现代科技史资料库这三大课题。经征求各方面意见，我们选定了30多个二级课题，于2000年11月正式启动了这项研究。国内近30个科

研院所、高等院校和其他机构的百余位科学技术史研究者和研究生承担了研究项目的二级课题。

中国近现代科学技术史的研究起步较晚,许多专题研究还有待开展,尚不具备编纂系统性史书的条件,加之项目的实施期限仅为三年,因此,我们预定的研究任务是以有创意的专题研究和重要的资料建设为主,以期为进一步系统深入的研究打下基础。我们希望本项目研究中国近现代科技发展历程中的基本问题,拓展研究方向,推动研究队伍的建设;以多角度的综合性研究、个案研究和学科史专题研究为主,力求在探索中国近现代科技发展的基本史实和脉络等方面取得进展;收集、抢救和整理重要的历史资料,编辑史料选辑,建立资料中心,为深入探讨中国近现代科技发展积累基本资料;总结中国近现代科技发展的历史经验和教训,为推动当代中国科学技术的发展提供历史启发。在梳理史实的同时,也致力于探讨科学、技术、经济、社会和文化的互动,尝试现代科学哲学、科学社会学和科技政策学等关于科学技术的理论和方法。

在短短的三年里,各课题组克服了很多困难,在资料搜集和研究方面花了大量精力,并积极配合项目的组织工作。经过努力,绝大多数课题组基本上完成了预期的研究任务,其主要研究成果就是奉献给读者的这套"中国近现代科学技术史研究丛书"。

项目的研究工作由中国科学院自然科学史研究所组织实施,是在中国科学院基础局、综合计划局、政策局和院所领导的大力支持下完成的。一部分课题还得到国家自然科学基金委员会的资助。自然科学史研究所人员承担了项目的约一半的课题,研究所领导全力支持项目组的工作,为完成研究工作提供了人力保证和相应的经费。自然科学史研究所前所长廖克、前副所长王渝生和有关人员为项目的立项和前期工作做出了重要的贡献。山东教育出版社将丛书列为重点图书出版计划,并为研究工作提供了部分配套经费,在专著的出版编辑方面做了很多工作。

中国科学院数学与系统科学研究院、中国科学院科技政策与管理科学研究所、中国科学院地理科学与资源研究所、中国科学院沈阳分院、中国科学院国际合作局、中国社会科学院近代史研究所、大连化工研究院制碱研究所、中国科技大学、清华大学、北京大学、上海交通大学、北京航空航天大学、哈尔滨工业大学、国防科技大学、西北大学、天津师范大学、首都师范大学、中共中央党校、中国农业博物馆、中国科技馆、国家测绘局、国家地震局地质

研究所、中国电力信息中心、庐山植物园、辽宁省图书馆等近30个单位为课题承担人给予了多方面的支持甚至提供配套经费。

在资料收集和建设方面，项目和各课题组得到了相关图书馆、档案馆和有关机构的理解和配合。中国科学院办公厅档案处、辽宁省档案馆等单位为查阅和利用档案资料提供了很多方便和帮助。还有许多单位的档案或资料管理机构向本项目二级课题提供了很多资料和帮助，具体情况详见丛书各卷的致谢或后记。自然科学史研究所图书馆为项目的资料建设做了许多工作。《自然科学史研究》、《中国科技史料》等学术期刊出版了项目的部分研究成果。

项目顾问就项目的设立和实施提出了指导意见。项目专家组在学术指导和课题评议等方面发挥了重要作用。丛书编委会、常务编委会和审稿专家审阅各课题书稿，为提高书稿质量做出了重要贡献。项目办公室负责项目的各项日常工作，组织学术活动，付出了辛勤的劳动。

在此，我们谨向项目的主管部门和合作单位以及顾问、专家和有关工作人员表示诚挚谢意！向项目各课题负责人和参与人员致以深深的谢意！

编撰这样规模的中国近现代科学技术史丛书是一个初步的尝试，不少著作还只是初步的研究成果，其中难免有疏漏和错误，恳请同人和广大读者赐教，以共同促进中国近现代科学技术史研究的开展。

张柏春　王扬宗

2003年10月31日

序　言

一、中国近代代数发展的学术背景

中国古代擅长代数与计算。春秋战国时期基于十进位值制计数法的筹算，公元前后的《九章算术》中的解线性方程组的消元法，4世纪的《孙子算经》及南宋秦九韶的《数书九章》中一次同余式组的解法（大衍求一术），11世纪贾宪的《皇帝九章算法细草》中的"杨辉三角"，宋元时期李冶的"天元术"、朱世杰的"四元术"，以及秦九韶的求高次代数方程数值解的"正负开方术"，都堪称当时世界一流的成果。但在明清时期，我国代数学的发展处于低迷状态。为什么会出现这种情况，是数学史界极关注的问题，有不少学者进行了探讨，其中从当时中国经济、政治和学术界的状况出发做出分析的居多。我们从我国古代代数学的学术特点看，觉得有几个因素不容忽略。

一是，它所涉及的问题都是来自生产和生活中的实际问题，因而问题的分类基本上是按生产和生活中面临的课题来分的（如《九章算术》将问题分为九类：方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、赢不足、方程和勾股），这种分类不利于思考按学科内容的自然延拓所形成的问题。我国古代数学家不善于按代数方程次数升高的方向去提出问题。

二是，它所要求的解答都是具体的数值结果。我国古代数学家的兴趣不在于明确给出针对一类代数问题的一般解，尽管他们实际上可能已经得到了求一类方程的普遍方法。这是属于观念的问题，在我国古代数学的发展中有根深蒂固的影响。我国古代的数学家不会去考虑一般方程的根式解的可能性问题，而这恰是近代代数学发展的一个契机。正是对一般五次代数方程有无根式解的探求，导致了代数新理论的诞生。因此，要从我国古代代数学的传统中生长出近世代数是困难的。

三是，我国古代代数学的符号体系很少变动，使用起来比较笨重，很难用旧瓶装新酒。

因此，我国20世纪代数学的发展，从引进和学习在西方首先发展起来的近代代数开始是必然的。

二、本书所论“代数”的学科范围约定

代数学一直是数学中一个重要的基础学科。古典意义下的代数学，几乎等同于解代数方程的理论与方法。在18世纪末叶至19世纪初期，一些数学家在寻找一般五次代数方程的根式解的过程中，发现和提出了不同于古典代数学的新的概念、方法和问题。1970年，J. L. 拉格朗日（Lagrange，1736—1813）研究了二、三和四次方程的求根公式的特点，引出了根的置换问题，其中孕育着解决五次方程有无根式解所需的新概念，即置换群和数域的概念。接着，1813年，P. 鲁非尼（Ruffini，1765—1822），1824—1826年，N. H. 阿贝尔（Abel，1802—1829）证明了一般的五次及五次以上方程不存在根式解的结论。阿贝尔实质上引进了在给定数域中的不可约多项式的概念。而E. 伽罗华（Galois1811—1832）的工作是真正的新起点，在19世纪20年代末至30年代初，他引进置换群的正规子群、数域的扩域和群的同构等概念，证明了由方程的根的某些置换所构成的群（即所谓的方程的伽罗华群）的“可解性”是方程可用根式求解的充分必要条件。他不仅彻底弄清了一般的五次及五次以上方程无根式解的原因（一般 n 次代数方程的伽罗华群是对称群，记作 S_n，当且仅当 $n \leqslant 4$ 时 S_n 为可解群，即 S_n 具备可解性，因此一般五次及五次以上方程不可能用根式求解），而且开辟了全新的代数学研究领域，这个代数学新领域，在19世纪末至20世纪初已被称为“近世代数学”。20世纪30年代，范德瓦尔登《近世代数学》一书的出版，标志着近世代数学作为一个数学分支的成熟，近世代数学现亦常称为抽象代数学。

“近世代数学以研究各种代数结构——群、环、域、格、结合及非结合代数等的性质为其中心问题，目前仍在蓬勃发展之中，它的方法和结果渗透到那些与它相接近的不同的学科中，成为一些有着新面貌和新内容的学科——代数数论、代数几何、拓扑代数、李群和李代数、代数拓扑、泛函分析等。这样，近世代数学就对于全部数学的发展显著地发生了很大影响，而且对于

理论物理学等其他学科也有很多的应用。"(华罗庚、段学复和王湘浩:"50年代的中国代数学研究"。引自《段学复文集》[北京大学院士文库],北京大学出版社,1999)。近世代数的这一发展特点,也是近代数学其他分支发展的特点。正如20世纪法国数学家J.迪厄多内(Dieudonne,1906—1992)所指出的:"一门理论中的任何一个概念,几乎都会在若干其他理论中产生明确的回响。因此,试图以固定刻板的边界,按传统的方法把数学划分成代数、分析、几何等等部分,现在已完全过时了。"因此,本书在讨论近世代数学在中国的发展时,把视野扩大到与近世代数相近的领域,诸如代数数论、代数几何,李群和李代数等。

三、关于我国近代代数发展的粗略分期

根据我国代数学发展的具体情况,我们将其分为以下几个阶段:20世纪初—20年代为起步阶段,20世纪30—40年代为群星璀璨的年代,20世纪50—60年代中期为人才培养和时起时落的发展阶段,20世纪60年代中期—70年代初为基本停滞阶段,20世纪70年代初—80年代初为停滞后的起步复兴阶段。(本书讨论终结于此,自20世纪80年代始,我国的代数学出现了稳定发展的新时期)在每个时期,我们会简要地阐述当时国际上代数学的发展状况,然后展开我国代数学家在人才培养与研究方面的成果,并探讨这些成果在我国代数学发展中的地位,在国际上的地位等问题。需要特别说明的是,我们编写此书属于中国近现代科技发展史研究项目中的一个课题,有较严格的交稿日期的限制,这使我们没有足够的时间去收集资料,所以我们的论述肯定是不充分的。加之代数学博大精深,以我们的知识背景从事这项工作,时感力不从心,因此我们的探讨仅仅是初步的。

四、几点说明

本书有篇幅不小的几篇附录,其中我们选译了若干我国代数学家最重要的论文,另有些同样重要的文章则因篇幅和时间关系,未能译出刊登。在附录中还有一篇段学复先生1947年在上海大公报上连载的文章"谈谈近世

代数学”。载承这篇文章的报纸，段先生保存了几十年的，几年前他亲手交给我们时，纸已经变黄发脆，折叠处字迹已模糊不清。我们想该文大概是我国学者最早向公众介绍近世代数的科普作品，很有历史价值，故在此重登。附录中的“几度沧桑两鬓斑，桃李天下慰心田——段学复教授访谈录”生动地反映了我国老一辈代数学家如何在艰苦的条件下做出贡献，以及他们为科学献身的精神。

我们向所有为我们提供了资料以及给与我们各种帮助的老师、朋友和同行表示感谢，他们中有：段学复、田方增、丁石孙、万哲先、郝炳新、刘绍学、吴品三、许以超、许永华、石生明、胥鸣伟、姚景齐、裴定一、李福安、戴宗铎、张奠宙、张英伯、张柏春、田淼、郭金海、袁钧等。我们的写作还得到了国家自然科学基金的资助（编号：10071085）。在文中我们使用了很多已发表的文献资料，对其作者我们深表谢意；没有前人的工作，我们寸步难行。

目 录

第一章 中国近代代数学教学和研究的兴起

（20世纪初—20世纪20年代）

本章讨论我国近代代数学的起步。对西方近代代数学在19世纪的兴起与发展，以及19世纪我国数学家在代数方面的工作做一回顾是有益的，由此可以窥见我国数学家在开辟近代代数教学与研究领域时所面临的与西方的巨大差距。辛亥革命前后我国的小、中、大学的学制和课程的变革，直接影响了我国近代数学教学与研究的发展，我国近代代数学的教学和研究就是在这一背景下发生和发展的，对此我们也略做叙述。20世纪前30年出国留学的数学家是一批在我国播种近代数学种子的拓荒者，其时在国外学习代数（包括数论）者寥寥，少于学习分析及几何者，这一点，从我们列出的12位1930年前在国外得博士学位的数学家的学位论文可见一斑。

第一节 西方近代代数学研究的肇始

在中国人于20世纪20年代迈进近代代数大门时，西方学者已从开创这一研究方向起走过了近百年的历程。西方近代代数学的兴起是以求解一般五次代数方程的根式解为契机的。1813年，意大利医生、数学家和哲学家P. 鲁菲尼，1824—1826年，挪威数学家N.H. 阿贝尔证明了一般五次及五次以上代数方程无根式解。1826年出版的克雷尔杂志的创刊号上，刊出了阿贝尔的论文“论代数方程，证明一般五次方程的不可解性”，掀开了近代代数学的序幕。

1830年有两件大事发生。一是，法国天才数学家伽罗华(1811—1832)首次在数学中使用“群”这一概念和术语，并彻底解决了方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 在什么条件下可通过其系数的有理运算及求 n 次方根来表示方程的解。他就代数方程根的置换群讨论了群这一代数结构的基本性质，开了对各种数域的代数结构做精细研究的先河。二是，两位英国数学家各自提出使代数运算一般化的设想。G.皮科克(Peacock,1791—1858)在他的 *Treatiseon Algebra*(《代数专论》)中对代数运算法则进行了系统整理，试图按欧几里得《几何原本》的模式赋予代数学一种逻辑结构，从而使代数学脱离实数或复数的特殊性质，而变为对不加解释的纯符号及其运算规则进行研究的科学。A.德摩根(De Morgan,1806—1871)在他的 *Trigonometry and Double Algebra*(《三角学与双重代数》)中提出如下思想：算术中或代数中的所有词或符号，除了一个例外(指等号＝)，都没有具体含义；研究的对象应是纯粹的符号及其组合规则；这种符号的代数即可成为上百种具有不同含义的代数的通用“语法”。无论是伽罗华还是G.皮科克或A.德摩根，他们的工作和思想都在把代数向抽象化、公理化的方向推进，其中，G.皮科克的目标虽很有价值，但方法过于含糊，无法达到他的愿望，而伽罗华的思想和方法超前于当时一些大数学家的观念，因而当时并未引起数学界的高度关注。

差不多在同一时期，另一位英国数学家W.R.哈密顿(Hamilton,1805—1865)在代数方面的惊人发现却立即引起了轰动。他在1833年开始研究以“实数对”为对象的形式代数，即试图把用“实数对”表示的复数及其运算规则推广到三维空间。这一努力未获成功，而意想不到地，他却创立了四元数理论(1843)。四元数是第一个被构造出的不满足乘法交换律的数学对象。人们太习惯于乘法必可交换的观念，所以它一经问世便引起数学家和物理学家的广泛讨论。四元数是一种四维的超复数系，它使代数真正突破了实数与复数的框架，大大开阔了人们的眼界，为数学家比较自由地构建各种新的代数系统做了思想上的准备。1844年，德国数学家H.格拉斯曼(Grassmann,1809—1877)在研究 n 维几何时，独立构架了更一般的具有 n 个分量的超复数理论。

第二节 19世纪早期中国数学家在代数方面的研究

众所周知，古代中国的代数学有过辉煌的成就。例如，《九章算术》（约1世纪）中给出了世界上最早最完整的线性方程组的解法，并导致负数概念及其运算法则的产生。为求三次以上代数方程的数值解而提出的贾宪三角（亦称杨辉三角，现代教科书则称之为帕斯卡三角），即二项展开式的系数表（11世纪），比阿拉伯与欧洲早了四五百年。我国13世纪发明的“天元术”、“四元术”给出了设未知数来建立方程的方法。类似于西方求高次方程数值解的霍纳法（19世纪初）的“增乘开方法”，在我国宋代秦九韶的工作（13世纪）中已趋完善。但13世纪之后，我国的数学处于相对停滞的阶段。到19世纪初，代数方面才有起色。钱宝琮先生在《中国数学史》中写道：“中国古代代数学家的光辉成就主要在依据具体问题中已给出的数据来建立方程，解这个方程得到解决问题的答数。对于方程的性质缺少充分的分析研究。到19世纪初，数学家才对代数方程论进行研究。汪莱（1768—1813）讨论了多正根与无正根的高次方程，李锐（1768—1817）发现方程可能有负根，从而讨论了方程的次数与实根个数间的关系。”汪莱发现古代一些算术书中的问题有不止一个正根，他把只有一个正根的方程定义为“可知”的，否则定义为“不可知”的。在他的著作《衡斋算学》中罗列出24个二次方程和72个三次方程（当然都是数字系数的方程），逐一讨论其“可知”或“不可知”。李锐在此基础上归纳出一些法则，相当于说实系数数字方程所具有的正根个数等于其系数符号序列的变化数或比此数少2（精确的说法应为少一个偶数）。这是我国古代代数学家朝理论研究而非纯粹计算的方向迈出的一步，但已比欧洲落后了近两个世纪。李锐的工作充其量只相当于17世纪笛卡儿（1596—1650）提出的判定方程正根个数的符号法则（参见刘纯：《大哉言数》，第220—222页）。

第三节 19世纪下半叶至20世纪初期西方代数学发展简况和中国学界的动向

19世纪上半叶在代数研究的观念上的变革逐渐为人们理解和接受，激发了人们在新的研究方向上的热情。由数论中的二次型及射影几何中的线性变换引申出的代数不变量理论，成为19世纪下半叶最热门的研究课题。1854年，英国数学家G.布尔（Boole，1815—1864）发表*An Investigation of the Laws of Thought*（《思维规律的研究》），创立了符号逻辑代数（俗称布尔代数）。1855年，英国数学家A.凯莱（Cayley，1821—1895）在研究线性变换的不变量时，系统地提出矩阵概念及其运算法则。矩阵是继四元数之后的又一类不满足乘法交换律的数学对象。它们和群论一样，都是推动20世纪前期抽象代数观点形成的重要因素，而且是描述和解决物理问题的有效武器。

在19世纪的最后30年至20世纪初期，伽罗华、G.皮科克、A.德摩根等人的代数思想开始广泛传播，使近代代数学进入一个繁荣发展的时期。1870年，法国数学家C.若尔当（Jordan，1838—1921）发表《论置换与代数方程》，全面清晰地阐释了伽罗华理论，推动了群论的发展。以下列举一些成果，可佐证当时代数学的繁荣局面：

1871年　德国数学家R.戴德金（Dedekind，1831—1916）建立起较为系统的代数数理论，定义了在现代数学中非常基本的“理想”、“素理想”等概念。

1872年　德国数学家F.克莱因（Klein，1849—1925）发表《关于近代几何研究的比较》，以“群”作为对当时已有的各种几何进行分类的基础，视任一种几何为对图形在某个特殊变换群作用下保持不变的性质的研究，对人们认识“群”论在数学中的作用产生了重要影响。

1873年　挪威数学家S.李（Lie，1842—1899）提出连续变换群的研究领域，创立了后来以他名字命名的李群理论，他还提出了一套针对连续群研究的代数方法，后发展成为李代数理论。

1878年　法国数学家C.若尔当开始系统研究群的表示理论。

1881年　美国物理学家、数学家J.W.吉布斯（Gibbs，1839—1903）发表《向量分析基础》，引入向量的各种代数法则。

1882 年　德国数学家 W. F. A. 冯迪克(von Dyck,1856—1934)开始抽象群的系统研究。(抽象群的公理系统在 20 世纪初由美国数学家 E. V. 亨廷顿(Huntington,1874—1952)等人给出)

德国数学家 L. 克罗内克(Kronecker,1823—1891)引进在域上添加代数量生成扩域的概念和"模系"概念。

1894 年　法国数学家 E. 嘉当(Cartan,1869—1951)发表《有限维连续变换群的构造》,解答了复单李代数的分类问题。

1895 年　德国数学家 F. G. 弗罗贝尼乌斯(Frobenius,1849—1917)开始抽象群的表示理论研究。英国数学家 W. 伯恩赛德(Burnside,1852—1927)两年后也在这一领域做出开创性贡献。

1897 年　德国数学家 D. 希尔伯特(Hilbert,1862—1943)发表《代数数域的理论》,用统一的观点整理和总结了近一个世纪代数数理论的成果。

1898 年　德国数学家 D. 希尔伯特发表《相对阿贝尔域理论》,为一种特别重要的代数数域"类域"的研究奠定了基础。

从以上可以看出,19 世纪欧洲数学家对代数学的认识确实发生了根本性的变化,使代数进入到一个更抽象、更一般的发展阶段。中国古代的数学家一直把数学(尤其是代数学)当做以"经世致用"为目的的"济世之术",没有建立以普遍性的纯理论为目标的观念,自宋元之后的代数学基本处于停滞状态与此不无关系。即使像上述汪莱和李锐等人稍微接触方程理论的研究,还受到遵循古训者的非难,比如有人提出根本没有必要对一般的三次方程详加讨论。(参见钱宝琮《中国数学史》,第 295 页)看来,要在中国本土的学术土壤中自我生长出那种纯数学的理论研究有相当的困难。

自 19 世纪下半叶开始,我国学者在传教士和国外学者的帮助下对大量西方科学著作进行翻译,其中也包括代数著作,这些著作的主要内容仍属初等代数范畴。例如,清代数学家李善兰(1811—1882)和英国传教士伟烈亚力(Alexander Wylie,1815—1887)合译了 A. 德摩根的 *Elements of Algebra*(中译名为《代数学》),这是我国的第一部符号代数学读本,书中除初等代数解方程的内容外,还涉及了指数函数及对数函数的幂级数展开式。再如,清代数学家华蘅芳(1833—1902)与英国学者傅兰雅(John Fryer,1839—1928)合译了《大英百科全书》第八版(1853)中的"代数"条目(中译名为《代数术》),等等。

这些译著在介绍欧洲的近代数学时,有一现象值得关注,即译著中对近代科学名词的翻译及符号的使用有着强烈的反差。例如,李善兰"十分贴切

地创译了一大批科学名词，如代数学中的代数、函数、常数、变数、系数、已知数、未知数、方程式、单项式、多项式等"（参见王渝生："李善兰"，刊于《中国古代科学家传记》，第1223页），但在符号的使用方面仍渗透着中国古算的味道。例如，将阿拉伯数字1，2，3，…改为一，二，三，…。26个英文字母用甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸取代A到J，子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥取代K到V，再用天、地、人元代替X，Y，Z，W。希腊字母α，β，γ等则用二十八星宿的名称代替（即角、亢、氐等）。函数符号"f"代之以"函"，自然对数的底e用"讷"替代。加号写成为⊥，减号则为⊤。这种约定下，下列解线性方程组的问题：

$$2x+3y-z=45,$$
$$3x+3z-y=42,$$
$$4y+4z-x=55$$

就要写成如下形式：

二天⊥三地⊤人＝四五，
三天⊥三人⊤地＝四二，
四地⊥四人⊤天＝五五。

这显然是很不方便的，在我国数学界完全采用现代的数学符号则是20世纪的事了。（参见张奠宙：《中国现代数学史略》，第23—26页）

第四节　辛亥革命前后中国各级学校的学制变迁与课程设置

1862年，我国第一所新学堂在北京成立，即京师同文馆。1867年，其中的天文算学馆开始招生，李善兰曾任算学总教习。该馆学制8年，其中第四学年开有代数课。最初用的教科书是中国古算书（如《算经十书》）和《几何原本》（徐光启、李善兰参与翻译的译本），以及上面提到的《代数学》、《代数术》等。前五年的安排类似中等教育，后三年接近于大学程度。课程方面前五年侧重外文，从学字母开始，后三年侧重学习科技知识。现将8年课程列于下：

第一年：认字写字，浅解词句，讲解浅书；

第二年：讲解浅书，练习句子，翻译条子；

第三年：各国地理，各国史略，翻译浅编；

第四年：数理启蒙，代数学，翻译公文；

第五年：讲求格物，几何原本，平面三角，弧三角，练习译书；

第六年：讲求机器，微分积分，航海测算，练习译书；

第七年：讲求化学、天文、测算，万国公法，练习译书；

第八年：天文测算，地理，金石，富国策，练习译书。

（参见舒新城：《中国近代教育史料》（上），北京：人民教育出版社，1981，第122—123页，转引自马忠林等著《中国教育史》，广西教育出版社，2001，第140—141页）

清末维新运动对我国近代教育起到了不小的推动作用。19世纪末，全国各地成立了不少讲授新学的普通学堂，数学是这些学堂的必修课，但内容大都较初等。

1898年，清政府建立京师大学堂，这是我国的第一所大学。

1901年，清政府明令废除八股。

1904年，清政府颁布《奏定学堂章程》，即著名的"癸卯学制"。这一教育体制是仿日本学制确定的：包括蒙养院四年（3岁入学），初等小学堂五年（7岁入学），高等小学堂四年（12岁入学），中学堂五年（16岁入学），高等学堂三年（21岁入学，相当于大学预科），分科大学三～四年（24岁入学），通儒院五年（27～28岁入学）。高等学堂算学门（相当于数学专业）的课程设置情况如下：主课有微积分、几何学、代数学、算学演算、力学、函数论、部分微分方程式论、代数学及整数论。代数学所用的教科书较流行的是查理·史密斯（Chares Smith）写的 *Elementary algebra*。商务印书馆1906年出版了它的中译本，书名为《查理斯密小代数学》，译者陈文，内容有四则运算、一次方程、二次方程、高次方程、二次方程问题、乘方、方根、指数、比例、级数、排列、组合、二项式定理、对数、杂定理及计数法等。此时使用的数学书已用自左至右横排的格式，并完全采用了西方数学符号和印度—阿拉伯数字。

辛亥革命后的1912年，民国政府公布了新的教育宗旨和"学校系统令"，否定了清代"忠君"、"遵礼"、"尚公"、"尚礼"、"尚实"的宗旨，提出了德智体美"四育平均发展"的方针，经修改后于1913年形成了"壬子癸丑"学制（壬子为1912年，癸丑为1913年，故有此称呼）。该学制主要借鉴德国的学制，规定普通教育系统分初等、中等和高等三个阶段：初等教育阶段又分两级，即初等小学四年（义务教育），高等小学三年。中等教育阶段设中学四

年。高等教育阶段设大学本科三年或四年，预科三年；专门学校本科三年（医科四年），预科一年。此外又设师范教育和实业教育两个系统。师范教育在当时担当非常重要的培养师资的任务，它分两级，即师范学校（本科三年，预科一年）和高等师范学校（本科三年，预科一年）。从数学课程的设置看，当时我们的大学、中学、小学及师范院校已实现了向现代学校的转变。以中学为例，四年中的数学课程安排如下：

第一年：算术，代数；

第二年：代数，平面几何；

第三年：代数，平面几何；

第四年：平面几何，立体几何，平面三角大要。

大学理科数学门（专业）开的数学课程有微分积分学、微分方程、函数论、近世代数、近世几何、平面及立体解析几何、四原（或诸原）概率论及最小二乘法、代数解析及方程式论、变分学、整数论、积分方程式论、理论物理学、星学、物理学实验、数学演习等。

1922年，教育部公布了《学校系统改革令》，当年为农历壬戌年，故称改革令规定的学制为“壬戌学制”。该学制受美国学制影响较大，从美国借鉴了中小学的六三三制（小学六年，初中三年，高中三年）。从数学课程的特点看，最大特色是初中各数学科目采用统编的方法，称为“算学”，“把算术、代数、几何、三角四项联络贯通成为一种混合数学”。当时大学数学系课程设置，我们从北京大学、清华大学、浙江大学和武汉大学等四所大学的例子中可见一斑。

一、北京大学算学系1924—1925年度所设课程

微积分（施仁培）、方程式论（靳钟麟）、初等天文学（吴文潞）、数论（吴文潞）、初等力学（孙瑞林）、高等微积分（王尚济）、近世代数学（秦汾）、球面及实用天文学（秦汾）、天体力学（秦汾）、流体力学（温毓庆）、理论力学（张贻惠）、立体解析几何（靳钟麟）、函数通论（胡濬济）、群论（胡濬济）、一次形化法（胡濬济）、近世几何学（王仁辅）、微分方程式（王仁辅）、高等平面曲线（王仁辅）、微分几何学（王仁辅）、形化及曲线几何学（王仁辅）、集合论（冯祖荀）、变分法（冯祖荀）、积分方程式论和微分方程式论（冯祖荀）、天文学进化

论(高鲁)、数学史(吴文潞)。[1] 所使用的教材都是直接采用欧美各国的教科书。(参见《北京大学校史,1898—1949》,第196页)

二、清华大学算学系1928—1929年度所设课程

微积分(上及下)、近世几何、方程论、行列式、高等几何(上)(锥线论)、高等几何(下)(二次曲线)、微分方程、理论力学、近世代数、普通问题讨论、高等分析(上)、高等分析(下)、分析函数、偏微分方程、椭圆函数、微分方程论、微分几何。(以上为必修课程)属于选修的数学课程有球面三角、图影几何、几率、射影几何、矢量分析、椭圆积分、数论、函数论、群论。(参见郭金海:博士学位论文《清华大学数学系与中国现代数学》,第91页)

三、武汉大学数学系1931年度所设课程

高等微积分(吴维清)、空间解析几何学(程纶)、射影几何学(彭先荫)、初等方程式论、级数论(萧文灿)、复变函数论(曾昭安)、近世代数通论(叶志)、高等坐标几何(汤璪真)、数论(吴维清)、物理向量解析、实变函数论(萧君绛)、近世代数(叶志)、微分几何学(汤璪真)、椭圆函数、变分学(萧君绛)、群论(萧君绛)、近世纯粹几何学(曾昭安)、积分方程式(吴维清)、微分方程式论。(以上为必修课程)。全系设置的选修课有非欧几何学、天文学、普通物理学理论及实验、普通化学理论及实验、生物学理论及实验(何定杰)、力学、高等曲线论(曾昭安)、绝对微分学(汤璪真)、圆球坐标几何学、李氏群论、相对论(叶志)。[2]

四、浙江大学数学系1932年度所设课程

初等微积分及微分方程式(钱宝琮)、初等代数方程式论(钱宝琮)、微积分(沈养厚)、高等微积分(陈建功)、级数概论(陈建功)、坐标几何学(苏步青)、代数学(章用)、复变数函数论(陈建功)、综合几何学(苏步青)、实变数函数论(陈建功)、微分几何学(苏步青)、微分方程(钱宝琮)、最小二乘法、高等电工数学、代数曲线论(苏步青)、数学史及数学教授法(钱宝琮)、数学研究。

---

① 括号内为时任讲课教师。

② 未注明讲课教师的表示该年未开此课程。

从上面所列课程看，当时大学开设的数学课面已经很广，但还不规范，比较凌乱。属于代数方面的课，大都比较初等，甚至行列式还单独设课。其中的近世代数学和群论已是比较现代的课程。这些课的具体内容，我们现在可根据当时各大学数学系所用的代数课本的内容来推测。在 20 世纪 30 年代前建立了数学系（当时，北方大学中的数学系还大多被称为算学系，较后才改称数学系）的大学已为数不少，现按各校建数学系的先后排列于下：

北京大学(1913)，南开大学(1920)，中央大学(即今南京大学的前身，1920)，北京高等师范学校(即今北京师范大学前身，1920)，武昌高等师范学校(即今武汉大学前身，1922)，厦门大学(1923)，成都高等师范学校(即今四川大学前身，1924)，中山大学(1924)，东北大学(1925)，清华大学(1927)，燕京大学(1927)，金陵大学(1927)，交通大学(1928)，浙江大学(1928)，北平大学(1928)，辅仁大学(1929)，暨南大学(1929)，大夏大学(1929)，光华大学(1929)。（参见《中国数学会史料》，第 22—23 页）

这些学校较普遍使用的代数教材，在方程式论方面有：

E. L. Dickson, *First course in the theory of equation*. Wiley, New York, 1922,

W. S. Burnside & A. W. Panton, *Theory of equation, with an introduction to the theory of binary algebraic form*. Dublin University Press Series. 1912。

在高等代数和近世代数方面有：

M. Bocher, *Introduction in higher algebra*. MacMillan, New York. 1907,

L. E. Dickson, *Modern algebraic theories*. 1926。（参见亢宽盈：留学生与中国数学的体制化，第 50 页）

L. E. 迪克森(Dickson, 1874—1954)的这本 *Modern algebraic theories*（《近世代数理论》）影响颇大。我们译出该书各章的目录，即可知当时近世代数教学的大概内容：

第一章　代数不变量初阶；第二章　二元型的共变量理论；第三章　矩阵，双线性型，线性方程；第四章　二次型和埃尔米特(Hermite)型，对称和埃尔米特双线性型；第五章　线性变换理论，不变因子和初等因子；第六章　双线性型对，二次型对和埃尔米特型对；第七章　置换群的主要原理；第八章　域，可约和不可约函数；第九章　给定域中方程的群；第十章　可根式解的方程；第十一章　尺规作图；第十二章　化方程为正规形式；第十三章　正多面体群，五次方程；第十四章　有限群表示为线性群，群的特征

标。

这本书在我国用了很长一段时间。杨振宁在一篇回忆录中说，他在1941年读分子光谱和群论关系的有关文章时，“把它带回家给父亲（杨武之）看。他虽不是念物理的，却很了解群论，他给了我迪克森所写的一本小书，叫做《近世代数理论》……这本书写得非常合我的口味，因为它很精简，没有废话，在20页之间就把群论中的‘表示理论’非常美妙地完全讲清楚了。我学到了群论的美妙和它在物理中应用的深入。对我后来的工作有决定性的影响”。（参见《杨振宁演讲集》，第117—118页）许多老一辈的数学家也都读过这本书。

上面提到北京大学20世纪20年代讲授代数课的教授秦汾（1887—1971），是江苏嘉定人，1909年在哈佛大学攻读天文学和数学而获学士学位。实际上，我国近代数学的教学与研究的起步，就是靠像他一样在20世纪早期出国学习数学的留学生回国后带动起来的。我国最早出国读数学、回国后有重要影响的学者当属冯祖荀。他1904年留学日本，攻读数学，未拿学位，回国后担任过北京大学、北京高等师范学堂和东北大学数学方面的教学与领导工作，成为我国现代数学早期最重要的代表人物之一。当时留洋学习数学而未得博士学位的一批人，在高等数学教学岗位上做出了不小的贡献。在1910年后，专攻数学而得博士学位者逐渐增加，1910—1929年间，我国派出的留学生中约有12人以数学方面的论文得到美国、德国、法国和日本的博士学位。他们中的许多人，在回国后担任了上述如雨后春笋般建立的大学数学系的领头人或成为教学与研究的中坚力量。

可见，经过几十年的努力，到20世纪20年代，中国的高等数学教育（包括近代代数教育）已开始进入实质性的发展阶段。

第五节　中国近代数学(包括代数学)教学与研究的拓荒者

根据袁同礼先生的《现代中国数学研究目录》可知，1910—1930年间，我国至少有12位学者在国外专攻数学而得到博士学位。下面列出他们的姓名，获博士学位的年份及学校，以及博士学位论文的题目。其中，从事分析学科的居多，几何学科的次之，涉及代数和数论的最少。

胡明复(1917,美国哈佛大学):具有边界条件的线性积分—微分方程(Linear integro – differential equation with a boundary condition)。

姜立夫(1919,美国哈佛大学):非欧几里得的线—球变换几何(The geometry of non – Euclid line – sphere transformation)。

黄炳铨(1922,美国加州大学):依点到线的变换对直纹四次曲面的研究及分类(A study and classification of ruled quartic surface by means of a point – to – line transformation)。

俞大维(1922,美国哈佛大学):抽象蕴含理论,一种构造性研究(Theories of abstract implication:a constructive study)。

魏嗣銮(1924,德国格丁根大学):关于具有一致分布质量的矩形薄膜的应力(Über die eing esp annte rechteckige platte mit gleichmassig verteiter Belastung)。

朱公瑾(1927,德国格丁根大学):一类常见函数方程解的存在性证明(Über den Existenzbeweis für die Losungen gewisser Typen von gewohnlichen Funktionalgleichugen)。

孙光远(1928,美国芝加哥大学):点对应的四重曲面的射影微分几何(Projective differential geometry of quadraples of surfaces with point in correspondence)。

杨武之(1928,美国芝加哥大学):华林问题的各种推广(Various generalizations of Waring's problem)。

赵进义(1928,法国里昂大学):具有两支分支整代数体函数的分布(Recherches sur les fonctions inverses des fonctions algebroides entieres a deux branches)。

陈建功(1929,日本东北帝国大学):以多篇论文获博士学位,其中10篇是有关三角级数的,例如,"具有绝对收敛的傅里叶级数的函数类"(On the class of functions with absolutely convergent Fourier series)。

范会国(1929,法国里昂大学):关于拟例外整函数及拟例外亚纯函数的研究(Recherches sur les fonctions entieres quasi exceptionnelles et les fonctions meromorphes quasi exceptionnelles)。

江泽涵(1930,美国哈佛大学):三变量调和函数临界点的存在性(Existence of critical point of harmonic function of three variables)。

这里我们稍微详细地介绍一下杨武之的情况。他跟我国近代代数和数

论的教学与研究的渊源较深。杨武之生于1896年,原籍合肥。少时父母双亡,家境清贫。在安徽省立第二中学毕业后,于1915年考取了北京高等师范学堂预科读书。当时北京高等师范学堂不收学费,又提供膳宿、助学金,因此不少家境不富裕的人都投考高师。高师数学系的老师大多为早期从日、美等国留学归国者,其中包括冯祖荀等。1919年,杨武之从高师毕业,回乡在安徽省立二中、安庆中学教书两年多。1923年,杨武之考取了安徽省官费留学美国,赴美学习。他先在斯坦福大学数学系读四年级,毕业后即转到美国中部的芝加哥大学攻读学位。他的导师就是上面提到过的L. E. 迪克森。L. E. 迪克森是当时著名的代数与数论学家,是美国国家科学院院士。杨武之从他那里学习了近世代数和数论,并与著名代数学家阿尔贝特(Albert,亦是迪克森的学生)共同研究。杨武之于1926年得到硕士学位,学位论文的题目是"The invariants of bililnear forms(双线性型的不变量)",文中系统地刻画了一个或多个双线性型的代数不变量。1928年,他完成了博士论文"华林问题的各种推广",文中主要讨论了以形如$\frac{(x-1)x(x+1)}{6}$(或称棱锥数)的非负整数表示正整数的问题。当时杨武之证明了每一非负整数可表示为至多9个棱锥数的和。从1896年马耶(Maillet)得到"每个充分大的正整数是12个棱锥数之和"定理以来,20多年过去了,杨武之首次得到比这更好的结果。1928年4月6日,杨武之在美国数学会的会议上介绍了这一成果。论文全文于他回国后在1932年的"清华大学理科报告"上发表。

杨武之得到博士学位后即刻回国,在厦门大学教了一年书,1929年即到清华大学算学系(1945年改称数学系)任教。他从1929年至1948年在清华执教期间有14年主持算学系工作,为中国数学界培养了大批优秀数学家,除了陈省身、华罗庚、柯召和许宝騄之外,还有庄圻泰、施祥林、徐贤修和段学复等等。几十年后他们中的许多人对杨先生的课还记忆犹新。在《杨武之先生纪念文集》(清华大学出版社,1998)中刊出了他的近20位学生写的生动文章。这里摘录几段。

陈省身回忆道:"杨武之先生……他是当时美国著名的代数、数论专家迪克森的学生。杨先生主攻数论方面的堆垒问题,是我国代数、数论领域的第一个博士学位获得者……清华大学早期有关代数、数论方面的课程,都是杨先生开的。我入(清华)研究院后,曾选读他开的群论课。"

段学复这样说:"……一年级我学习杨先生开设的高等代数(即方程式论)课程。以后还学习了杨先生开的近世代数(即矩阵论)、群论,还有杨先生开的初等数论,则是1934年夏毕业前那一学年才学习的……我深为杨先生的精湛教学所吸引,这些课对我后来的科研和教学有很大影响。"

杨武之对学生的关心超出教学之外。陈省身、柯召留学之前都曾去找杨武之商量出国留学事宜。杨武之对华罗庚尤为关注,非常器重他的才能。他是华罗庚研究数论的启蒙老师,又是他与叶企孙、熊庆来力排众议,将华罗庚从助理员提到助教,因此华罗庚才得到去英国进修的机会。华罗庚从英国归来后到西南联大,杨武之在讨论华的聘任问题时,拿着华的论文仗义执言,力主将他越过讲师、副教授而直接提为教授。这种情况是前所未有的。1980年10月4日,华罗庚在给香港"广角镜"杂志编辑的信中还回忆说:"……引我走上数论道路的是杨武之教授…… 从英国回国,未经讲师、副教授而直接提我为正教授的又是杨武之教授。"杨武之为自己的学生青出于蓝,成为优秀数学家而感到高兴和欣慰。徐贤修回忆说,杨先生"课余则谈笑风生,视学生为家人子女,授人以处世之道"(徐贤修语)。杨武之在20世纪30年代以后没有再做研究工作,全部精力放在教书育人上。这几乎是他那一代数学家的共同特点。正是他们的敬业与奉献精神,才使我国很快就在20世纪三四十年代出现了一批高水平的代数学家。他们的贡献是不可磨灭的。

第二章 20 世纪 30—40 年代的中国代数学

第一节 世界代数学发展趋势

从 20 世纪初至三四十年代，西方学界在近世代数领域有长足的进步。段学复指出："由戴德金和希尔伯特于 19 世纪末叶的工作开始，在 H. 韦伯的三卷巨著《代数教程》的影响下，E. 施泰尼茨于 1911 年发表的重要论文"域的代数理论"对于代数学抽象化工作贡献很大。自 20 世纪 20 年代起，以 E. 诺特和 E. 阿廷及她和他的同事、学生们为中心，抽象代数学的发展极为灿烂。在群论、域论、阿廷的形式实域理论(与 O. 施赖埃尔合作)、希尔伯特第 17 问题的解决、类域论、诺特(交换)环的理想理论、诺特的模论及应用(建立起有限群的表示理论与代数的构造理论之间的联系)、代数的理论到阿廷环的推广等方面，都有重要的成果。德国学派的 H. 哈塞、R. 布饶尔、E. 诺特与美国学派的 A. A. 阿尔伯特证明了一个主定理：代数数域上的中心单纯代数都是中心上的循环代数(1930—1931)。它是这时期一个最突出的成就。B. L. 范德瓦尔登根据诺特和阿廷的讲稿于 20 世纪 30 年代初写成《近世代数学》，综合当时抽象代数学各方面的工作于一书，对于抽象代数学的传播和发展起了巨大的推动作用。""在 1933—1938 年间，经过 G. 伯克霍夫、J. 冯·诺伊曼、Л. B. 康托洛维奇、O. 奥尔、M. H. 斯通等人的工作，格论才确立在代数中以及在数学中的地位。而自 20 世纪 40 年代中叶起，作为线性代数的推广的模论得到进一步的发展并产生深刻的影响，泛代数、同调代数、范畴等新领域被建立和发展起来，它们都是在抽象代数学中起统一作用的概念，在它们的各自研究中，人们能够从某一方面同时研究许多代

数结构,甚至其他数学结构。"(参见《中国大百科全书数学卷》,1988.第114—115页)

我们下面列出1900—1949年间国外数学家涉及近世代数和相关领域的部分重要成果,以便读者在阅读我国数学家的工作时作为参照。

1900年 德国数学家D.希尔伯特在国际数学家大会上提出著名的23个数学问题,其中,跟代数及数论关系密切的有4个问题:①任意数域中最一般互反律的证明(第9问题);②系数为任意代数数的二次型问题(第11问题);③阿贝尔域上的克罗内克定理在任意代数有理域上的推广(第12问题);④正定形式的平方表示(第17问题)。

1904年(—1911)年 犹太数学家I.舒尔(Schur,1875—1941)首次通过线性函数变换来研究群的"表示",将群表示论推广到一切有限抽象群。

1905年(—1914)年 苏格兰—美国数学家J.H.M.韦德伯恩(Wedderburn,1882—1948)证明了有限除环是交换环的定理以及半单代数结构的定理,出版了《论超复数》一书,大大扩展了代数的含义,推动了线性结合代数的发展,成为抽象代数理论创立的先声。

1908年 德国数学家K.亨泽尔(Hensel,1861—1941)系统论述了p-adic数理论,这一理论后成为沟通抽象代数学和拓扑学的一座桥梁。

1911年 德国数学家E.施泰尼茨(Steinitz,1871—1928)发表"域的代数理论",首次对域论进行统一的抽象处理,这一工作是抽象代数发展的里程碑之一。

1913年 匈牙利数学家J.屈尔沙克(Kürschak,1864—1933)提出赋值概念,首先用公理法讨论乘法赋值,推进了抽象代数学的建立。
法国数学家E.嘉当(Cartan,1869—1951)引入旋量概念,建立了半单纯李群的基本概念。

1919年 美国数学家J.W.亚历山大(Alexander,1888—1971)用代数方法研究拓扑,使同调论得到数学界的重视。

1920年 日本数学家高木贞治(Takagi,1875—1960)解决代数学中的"克罗内克青春之梦",证明任何阿贝尔扩张均为分圆域的子域。

1921年 德国数学家E.诺特(Noether,1882—1935)所著《环中的理想论》出

版，该书为抽象代数学的代表作。

1923—1924 年 德国数学家 H. 哈塞(Hasse, 1898—1979)提出关于有理数域上型的哈塞准则以及代数数论中的局部—全局原则，推动了希尔伯特第 11 问题的解决。

1926 年 奥地利数学家 E. 阿廷(Artin, 1898—1962)在《实域的代数构造》(与施赖埃尔合著)中引入"实域"概念，次年又解决了希尔伯特第 17 问题。

1930—1931 年 荷兰数学家 B. L. 范德瓦尔登(Van der Waerden, 1903—1996)的《近世代数学》出版，标志着抽象代数学这门学科的系统化。

1933 年 匈牙利数学家 A. 哈尔(Haar, 1885—1933)发表"连续群理论中的测度"，给出群论的哈尔测度理论，是近世代数学和拓扑学的基石之一，对拓扑群(连续群)的发展尤为重要。

1934 年 德国数学家 W. 克鲁尔(Krull, 1899—1971)发表"理想理论"，对诺特环和一般交换环的发展做出重要贡献，创立了局部环的理想理论。

1936 年(—1943) 原籍匈牙利的美国数学家冯·诺伊曼(von Neumann, 1903—1957)建立算子环理论，将代数结构和拓扑结构结合起来。

1937 年 荷兰数学家 B. L. 范德瓦尔登(Van der Waerden, 1903—1996)著《代数几何引论》，应用抽象理想论引进交换代数方法，奠定代数几何新基础。

1942 年 美国数学家 S. 莱夫谢茨(Lefschetz, 1884—1972)著《代数拓扑学》，标志该分支学科的确立(同调和同伦理论是这一分支的两大支柱)。

1944 年 美国数学家 O. 扎里斯基(Zariski, 1899—1986)解决三维代数簇的奇点解消问题，这是代数几何中的重要问题。

奥地利数学家 E. 阿廷(Artin, 1898—1962)建立阿廷环理论，发展了 J. 韦德博恩的代数结构理论，促进了环的结构理论的发展，并为有理数域上的半单代数提供了新的基础。

1945 年 原籍波兰的美国数学家 S. 艾伦伯格(Eilenberg, 1913—1998)和美国数学家 S. 麦克莱恩(MacLane, 1909—2005)引入群的上同调群

的概念,及范畴、函子等概念。随同调论发展后形成一种新的代数方法,即同调代数。

法国数学家 J. 勒雷(Leray,1906—1998)建立谱序列理论,这是同调代数中的重要理论。

1946年　法国数学家 A. 韦伊(Weil,1906—1998)著《代数几何学基础》出版,该书后成为该学科的经典著作。

1948年　法国数学家 C. 谢瓦莱(Chevalley,1909—1984)和 S. 艾伦伯格建立了李代数的上同调理论,把李群和李代数的研究推到一个新的层次。

特别需要指出,从20世纪20年代始,以德国数学家 E. 诺特和 E. 阿廷为中心的抽象代数学派极为活跃,人才辈出,成果累累。20世纪20年代末,我国就有年轻学子曾炯直接参与其间,也做出了优异成绩。可惜当时国内尚无形成开展抽象代数研究的氛围,曾炯的工作在国内还只能是孤独闪亮的明珠(他的工作下面将有论述)。直到20世纪40年代的西南联大时期,我国才有了较强的代数研究力量。

第二节　1933年关于大学数学教学的一次讨论

在本书第一章,我们提到20世纪20年代末我国各大学普遍建立了数学系。但从全国的学术气氛而论,理科教育的状况并不让人乐观。当时的教育部为此在1933年4月召开了全国性的天文数学物理讨论会。会后出版的《教育部天文数学物理讨论会专刊》,详细记载了会议讨论的各种问题和建议。从中可以了解到20世纪30年代初我国数学界的状况。

该专刊的"序二"是当时的教育部长朱家骅写的。他写道:"故自实际论之,科学之在中国,不过少数学者之所努力而已。即在今日,就国内大学学生及留学生所习科目加以统计,人文法科者,犹且过于理工等科,不成其为适当之比差也,其致力于天文数学物理化学等纯粹科学者,尤寥寥乎不可多得焉。夫中国提倡科学数十年,至于今日,尚未能深入广被,以与欧美学者相颉颃,宁非吾国人士之过耶?本部有鉴于此,为谋一切政令之合于社会,且为集中全国学者力量,冀便倡导科学研究起见,先于去年八月有化学讨论会之召集,复于今年四月有此次天文数学物理讨论会之召集,继是已往,其

他各科讨论会，亦将依次举行，庶几学术上一切进行事宜，皆能有所规划，资以改善，以为复兴民族之张本，此则家骅之微意也。"这段话说明了此会的目的，也讲出了自然科学和数学面临的困难。

参加这次会议数学组的学者有（名字后括号内是该专刊注明的此人"现任职务"）：孙光远（清华大学数学系教授）、胡文耀（数学界对此人不太熟悉，该专刊上注明他时任震旦大学校长，曾在比利时的鲁文大学获数理博士学位）、胡敦复（交通大学数学主任教授）、冯祖荀（北京大学数学系研究教授兼主任）、余光烺（金陵大学数学系主任，中央大学兼任教授）、曾昭安（武汉大学数学系主任）、蒋绍基（中央大学数学教授，军需学校会计统计训练班数学教授，中央政治学校附设计政学院数学教员）、范会国（北平师范大学教授）、朱公瑾（光华大学数学系教授）、萧君绛（武汉大学数学系教授）、苏步青（浙江大学数学系教授）、姜立夫（南开大学教授）、钱宝琮（浙江大学数学系教授）、江泽涵（北京大学数学系教授）、郑桐荪（清华大学数学系教授）、顾澄（北平大学女子文理学院院长及数学系主任）、汤璪真（武汉大学教授）、赵进义（北平师范大学数学系主任，中央研究院天文研究所特约研究员）、黄际遇（山东大学文理学院院长兼教授）、胡浚济（北京大学教授）、杨武之（清华大学教授）等。

从会议讨论的问题和各项议决案看，这次会议主要关心的，一是，改进大学数学课程的设置，使之标准化。加强基础课的教学，课程不必"力求新异，亦不必过于深奥"，"对于数学各分门，务求平均发展"，"应以少立名目，充实内容，并循而进为原则"。二是，规范数学名词，确定了一批外文数学名词的中文译名。三是，确定一批标准数学参考书，建议编译一些外文的数学教科书，便于国内学子学习。关于大学数学系最低限度必修课程中代数方面的课程定有两门：初等代数方程式论（三次及四次方程式之解法、数字方程式、对称函数、行列式），高等代数学（矩阵、形式论、不变式论、群论入门、初等因子）。相应的参考书除上面提到过的 Bocher 和 Dickson 的书外，还有另外四本：

藤原松三郎，《代数学》二卷；

Serret, J. A., *Cours d' algebre superieure*.

Comberousse, C. J. F. de., *Cours de mathematiques*.

Bieberbach, L. U. Bauer, G. C., *Algebra*.

这次讨论会除以上主要论题之外，还讨论了诸如加强中学数学教育，分

工协作译书等议题。有趣的是还有一项“关于汪联松算稿之审查报告案的议决”，内容是：“查三等分任意角与二倍立方积两问题，非专用圆规及直尺所能解决。此为几何学上既成事实，无翻案之可能。作者既无明白条举之作法，复无合于理论之证明，应毋庸审查。稿发还。”

从这次会议收到的各校数学系概况看，由于学生人数少，教员相对学生人数的比例相当高。现举几例(1933年)：

清华大学数学系　教授4人，专任讲师1人，教员2人，助教2人。
学生：一年级7人，二年级5人，三年级3人，四年级3人。研究生：一年级2人，二年级2人。

中央大学数学系　教授6人，讲师2人，助教4人。
学生：本年无一年级生，二年级5人，三年级6人，四年级8人。

中山大学数学系　教授5人，助教2人。
学生：一年级9人，二年级9人，三年级6人，四年级11人。

浙江大学数学系　教授3人，讲师1人，助教2人。
学生：一年级10人，二年级6人，三年级3人，四年级3人。

武汉大学数学系　教授6人，助教4人。
学生：一年级5人，二年级6人，三年级10人，四年级6人。

北平师范大学数学系　教授4人，讲师3人，助教2人。
学生：一年级无统计数字，二年级21人，三年级14人，四年级12人。

交通大学数学系　教授3人，讲师3人，助教1人。
学生：一年级3人，二年级2人，三年级4人，四年级未开班。

可以想像，在这种比例下，只要学生中有好的苗子，加之有“得天下英才教育之，一乐也”胸怀的教师，在较短时间内培养出基础扎实，有发展前途的数学家是完全可能的。事实也正是如此。

第三节 西南联大数学系的课程设置

在上述1933年的讨论会之后，我国的大学数学教育朝加强基础课程的方向前进了一步。抗日战争爆发后，许多大学迁往大后方。北方著名的北京大学、清华大学和南开大学在云南昆明联合组成了国立西南联合大学。该校在极端困难的条件下，对我国的教育和科学事业做出了重要贡献。那里的数学系（当时还称算学系）也极有特色，培养了许多数学家。有关该校的全面情况，可参阅《国立西南联合大学校史——1937至1946年的北大、清华、南开》（西南联合大学北京校友会编，北京大学出版社。1996），这里只列出与数学课程有关的一些内容。当时数学系的必修课约有如下几门：

微积分（一年级必修）、微分方程（二年级必修）、高等微积分（或称高等分析）（二、三年级必修）、高等代数（二年级必修）、高等几何（二年级必修）、立体解析几何（原书未说明必修年级）、复变函数论（也称函数论）（三、四年级必修）、近世代数（三、四年级必修）、微分几何（三、四年级必修，有时作为选修）、微分方程式论（三、四年级必修）。

其中高等代数的任课教师有蒋硕民、程毓淮、杨武之、江泽涵、刘晋年等，教材取自M. Bocher的*Higher Algebra*或C.C. MacDoffee的*An Introduction to Abstract Algebra*或H. Hasse的*Hohere Algebren*。有的学年以线性代数来代替这门课，线性代数课由蒋硕民、程毓淮讲授，教材取自O. Schreier和E. Sperner的*Einfuhrung in die Analytische Geometrie und Algebra*（有樊墦的中译本）。1941—1942年间，刘晋年讲高等代数也以此为教材。有的年度还加授方程式论，由杨武之、钟开莱讲授，教材取自L.E. Dickson的*Elementary Theory of Equations*。

近世代数课则先后由华罗庚、蒋硕民、程毓淮、申又枨、刘晋年、许宝騄等讲授，教材取自B.L.范德瓦尔登的《近世代数学》（*Moderne Algebra*）。

数学系开的选修课非常多，属于代数学（包括数论）方面的有：

（1）数论 先后由杨武之、华罗庚讲授。教材取自L.E. Dickson的*Elementry Theory of Numbers*或Hardy & Wright的*Theory of Numbers*；

（2）初等数论 华罗庚讲授（1942—1944）；

（3）代数数论 华罗庚讲授（1942—1943）；

(4)解析数论　华罗庚讲授(1941—1942 下学期);

(5)素数分布及黎曼猜他函数　华罗庚讲授(1941—1942);

(6)连续群论　华罗庚讲授(1943—1944 上学期);

(7)行列式及矩阵　华罗庚讲授(1942—1943 下学期);

(8)群论　杨武之(1937—1938 上学期)及程毓淮(1942—1943)讲授;

(9)理想数理论　刘晋年讲授(1943—1944 下学期)。

此外,数学系还举办很多讨论班,跟代数及数论有关的有:

(1)代数讨论班　为四年级学生选习,参加的教师有华罗庚、蒋硕民、曾远荣、陈省身、王湘浩等;

(2)群论讨论班　由程毓淮主持,参加者有孙树本、栾汝书、蓝仲雄;

(3)解析数论讨论班　由华罗庚主持,参加者有闵嗣鹤等;

(4)有限群讨论班　由华罗庚主持,参加者有段学复、樊增、徐修贤等;

(5)拓扑群讨论班　由江泽涵主持,参加者有王湘浩、阿树本、栾汝书、蓝仲雄、崔士英等。

由于是三校合并,西南联大数学系教师队伍非常强大。1942—1943 年间,有教授 10 人(江泽涵、申又枨、程毓淮、许宝騄、杨武之、赵访熊、陈省身、华罗庚、姜立夫、刘晋年);副教授 1 人(赵淞);还有专任讲师 2 人;教员 3 人;助教 9 人;共计 25 人。而当时全系学生才 31 人(下学期为 25 人)。教师和学生的比例几乎达到了 1 比 1。据统计,在数学系学习过的学生离校后大多在高等院校和科研单位工作。毕业生中当选院士者有王宪钟(台湾中央研究院)、王浩(美国文理科学院)、廖山涛(中国科学院)、万哲先(中国科学院),严志达(中国科学院)。其中,万哲先和严志达的研究方向是代数。

第三章　中国代数界群星璀璨的年代

从20世纪初开始,大约经过两代人的努力,到20世纪三四十年代我国已出现了能在世界数学研究前沿工作的数学家。以下我们将简要介绍几位在代数方面做出突出成绩的中国数学家。

第一节　曾炯:函数域上的代数

曾炯,又名曾炯之。1898年生于江西省新建县乡村的一个渔民家庭。曾炯幼时家境贫寒,虽然他自小天资聪明,喜欢读书,但几次因家中无力负担学费,无奈辍学,只好边作工,边自学。1915年他以同等学历考入省立第一师范学校(南昌师范学校的前身),刻苦攻读,于1918年毕业。在当了两年小学教师后,他又上了两年高中。1922年,他考取武昌高等师范学校(武汉大学的前身)数学系,受教于老一辈数学家陈建功教授。曾炯学习勤奋,深得陈建功先生赏识。他鼓励曾炯准备条件出国深造。因此,曾炯不仅学好本科课程,还自学了德语。1926年从武昌高师毕业后,曾炯任教于江西省省立第六师范学校,并于次年考取了江西省庚子赔款留学生。1928年他赴德国留学,1929年春他进入了格丁根大学。

格丁根大学是当时的数学中心。迄今为止最伟大的女数学家,象征着当时代数最高水平的E.诺特教授就在格丁根。曾炯成为她的学生。在诺特的指导下,曾炯进步很快,在1933年即写出了第一篇论文"论函数域上可除代数"[参见本书附录1]。惜乎1933年希特勒上台,纳粹排犹,诺特被解职,并于1933年10月去了美国。曾炯则在完成了他的博士论文"函数域上的代数"[参见本书附录2]后到E.阿廷所在的汉堡大学学习。值得强调的是格丁根大学(以诺特为代表)和汉堡大学(以阿廷为代表)是当时抽象代数

学的两个研究中心。曾炯就是这两个中心培养出来的代数学家。

得到博士学位后，格丁根大学曾劝他留下工作，但曾炯决心报效祖国，并于1935年7月回国，被浙江大学数学系聘为副教授。在这期间，为了纪念诺特教授，他将写于1934年的论文“论交换域的拟代数闭性的层次理论”发表在《中国数学会学报》第一卷81—92页。1937年曾炯被北洋大学聘为教授。旋即抗日战争爆发，他携妻随学校西迁，历经西安、汉中、城固等地。1939年，北洋大学原校长率领一批沦陷区的学者创办国立西康技艺专科学校，以西康省会西昌的寺庙为校舍，条件十分艰苦。曾炯应邀毅然前往，讲授高等数学。由于曾炯一直身患胃病，战乱时期颠沛流离，加之西昌当时医疗条件很不好，他不幸于1940年11月因胃穿孔在西昌逝世，时年仅42岁。

曾炯虽然在世时间不太长，但是他在20世纪30年代(1933—1936)留下的三篇文章是代数界的一大财富，这足以奠定他在代数学界的地位。

“论函数域上可除代数”是曾炯在诺特指导下于1933年所写的第一篇论文。这篇论文在格丁根的一次会议上宣读过。它的主要内容是证明了函数域中的一个定理：“如果Ω为代数封闭域，$\Omega(x)$为有理函数域，k是$\Omega(x)$上n次代数扩张，则k的以k为中心的可除代数只可能是k自身。”这个问题是诺特与阿廷都很关注的问题。“阿廷首先注意到，代数的理论可以看成域中丢番图方程的解的理论。也就是说，在域K上可除代数的不存在性与一类方程具有K中多个未定元时的可解性之间有充要关系”(段学复语。引自《著名数学家曾炯博士纪念文集》第3至4页)，曾炯正是沿着这个方向做的。他的博士论文“函数域上的代数”从基本概念和辅助定理出发，分别对代数闭域和实闭域函数域两种情形讨论其上的代数。作者不仅用三个新方法重新证明了第一篇论文中的定理，而且得出很多新结果，其中定理6被《岩波数学百科词典》列为曾(炯之)定理，即：代数闭域上单变量代数函数域上的正规单代数是可裂的(即是全阵代数)。曾炯的第三篇论文“论交换域的拟代数闭性的层次理论”是他1934年在汉堡进修时写的，在他回国后的1936年发表在《中国数学会学报》第一卷第一期。此文直接考虑单变元代数函数域的方程，他将拟代数闭性的概念扩充为带有层次i的域，现称为C_i域。按这种层次，代数闭域是层次0的。设$\Omega(x)$为代数闭域上的有理函数域，$\Omega(x,y)$是$\Omega(x)$上的代数扩张，曾炯证明了$\Omega(x,y)$的层次数为1。这便是《岩波数学百科词典》中所说的另一个曾(炯之)定理。曾炯证明了如果y是超越元，则$\Omega(x,y)$的层次$\leqslant\Omega(x)$的层次$+1$。由此可得：若K=

$\Omega(x_1,x_2,\ldots,x_n)$,其中 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 皆为超越元,则 K 为 C_i 域($1\leq i\leq n$)。由上述结果可得到:Ω 为代数闭域,K 是 Ω 上超越次数为 n 的函数域。设 f 为 K 上的齐次多项式,次数为 d,那么只要 f 所含的变元数 > d^n,方程 $f=0$在 K 中必有非零解。戴执中先生曾撰文叙述了曾炯这条定理的意义。在 1951 年美国数学家 S. 兰格(S. Lang,1927—)重新提出曾炯所引入的概念,也得出上面陈述的定理,因此该定理一直被称为兰格定理,直到 20 世纪 60 年代后期,普菲斯特(A. Pfister)才将之称为:一条由兰格重新发现的著名的曾定理。现在不少文献中称这条定理为曾—兰定理。戴执中先生的文章中主要讲了曾定理与希尔伯特(Hilbert)第 17 问题的关系。希尔伯特第 17 问题是:"实系数的二元半正定有理函数总能表成实系数的有理函数的平方和。对于多元情形,这个结论是否仍然成立?"阿廷于 1926 年对于实闭域上的多元函数域作出了肯定的回答,但是没有说明表成几个有理函数的平方和。直至 20 世纪 60 年代中后期,阿克斯(J. Ax)和普菲斯特等人证明了当变数为 n 时,平方和的个数不超过 2^n。在证明这个定理时,曾定理是主要工具之一。因此,在 1976 年普菲斯特所写的介绍希尔伯特第 17 问题的文章中写道:"在阿廷以后,曾炯在 1936 年所做的工作是重要的第一步,即使他本人没有预见到这一工作与希尔伯特第 17 问题之间的联系。"

第二节 华罗庚:有限群论、体论、典型群和矩阵几何

华罗庚是中国人最熟悉的一位数学家,他对我国的近代代数发展起了非常大的作用。

华罗庚的身世极具传奇色彩。他 1910 年出生于江苏金坛。在老家只上了中学,但他通过自学学习了数学,并在《科学》等杂志上发表过一两篇文章,引起了清华大学教授们的注意。于是他在 1931 年被请到清华,一边当助理员,一边学习。这是清华大学第一次为华罗庚破格。清华当时人才济济,教师除杨武之和熊庆来以外,还有孙光远,年轻人有陈省身、许宝騄、柯召、吴大任,稍晚些还有徐贤修、段学复,等等。华罗庚立下宏愿要"以过人的努力,追求自己的成就"。他曾对好友徐希贤说:"人家受的教育比我多,我必须用加倍的时间以补救我的缺失。所以别人每天工作 8 小时,我要工作 12 小时以上才觉得心安。"柯召回忆当时三位老师(杨武之、熊庆来、孙光

远)给 5 个学生上课,其中有两个研究生陈省身和吴大任;两个转学来的高年级学生柯召和许宝騄,另一个就是华罗庚。华罗庚一面听课,一面自学。他读了希尔伯特的《数论报告》这一经典著作,以及兰道(E.G.H. Landau,1877—1938)的三卷《数论教程》。对这些名家之作,华罗庚都反复钻研,如饥似渴地学习。同时,他还在杨武之等老师的指引下开始了数论研究。

华罗庚的才能在清华渐渐被赏识。他只有初中学历,能不能破例上堂讲课呢?几位前辈数学家都认为他有此能力。在郑桐荪教授提议下,叶企孙拍板定案,聘华罗庚为助教。这样清华大学第二次为华罗庚破格。

华罗庚 1934 年发表了 8 篇论文,1935 年发表了 7 篇论文,1936 年发表了 6 篇论文。1935—1936 年,法国著名数学家 J. 阿达玛(Hadamard,1865—1963)和 N. 维纳(Wiener,1894—1964)都相继访问过清华,他们对华罗庚非常欣赏,给予他很多帮助和指导,并推荐他到英国数论家 G.H.哈代(Hardy,1877—1947)所在的剑桥大学进修。华罗庚 1936 年到达英国。当人们问到他准备如何安排学习时,他说:"我来剑桥大学是为了求学问,不是为了学位。"因此他不准备拿学位。这使英国人大感惊奇。剑桥大学是当时的一个数学中心,汇聚了很多数学界名家和后起之秀。华罗庚不为博士学位所动,充分利用剑桥的学术环境,做出了世界一流的工作,引起国际同行的重视。剑桥时期成为华罗庚的第一个创作高峰。华罗庚在数论的完整三角和、华林问题,以及哥德巴赫猜想等方面都做了工作,不少结果超过了当时在剑桥的 H. 达文波特(Davenport,1907—1969)等人,如三角和估计的不等式。(后来,华罗庚从他与 A. 韦伊的不等式得到了更重要的"韦伊—华不等式")

抗日战争爆发后,华罗庚决意回国,并在 1938 年辗转到达昆明。清华大学究竟以什么名义聘请他,这是一个难题。他出国时仅仅是一名教员。经杨武之、吴有训等人仗义执言,并出示了华罗庚在国内外发表的数十篇论文,终于使教授聘任委员会一致通过华罗庚的正教授资格。华罗庚越过讲师、副教授而直接提升为正教授,这是清华大学为华罗庚所做的第三次破格。

清华大学为华罗庚所做的三次"破格",为中国培养出一代大数学家华罗庚,这在数学史上是值得大书一笔的。龚自珍曾写诗道:"我劝天公重抖擞,不拘一格降人才。""天公"并不吝惜人才,需要的是发现人才,培养人才,珍视人才。

在昆明十分艰苦的条件下,华罗庚的研究工作丝毫没有停步。20 世纪

40年代,华罗庚在代数方面做出了一系列重要成果。

1940年,华罗庚在昆明讲授近世代数,以范德瓦尔登的《近世代数学》第一卷为蓝本,并做了很多修改。他还给教师讲了域论八讲,并在西南联大办了中国第一个有限群讨论班,学习和讨论扎森豪斯(Zassenhaus)新出的《代数》一书,参加者有段学复、樊墈与徐贤修等。这期间,他与段学复合作写下了两篇关于素数阶群的若干计数定理的文章,1940年发表在《中国数学会学报》和《武汉大学学报》上。

华罗庚在1940年写的一篇重要文章"p的幂次阶群的一些计数定理"引入了秩(rank)的概念。一个p^n阶群称作p群,定义一个p群秩为α,是指群中元素的最大阶数为$p^{n-\alpha}$。利用秩的概念,华罗庚证明了p群中存在拟基底,即:若$p \geqslant 3$且$n \geqslant 2\alpha+1$,则群中每个元素都可以唯一表成:

$$G = A^{\delta} A_{\alpha}^{\delta_{\alpha}} A_{\alpha-1}^{\delta_{\alpha-1}} \cdots A_1^{\delta_1}, 0 \leqslant \delta \leqslant p^{n-\alpha}-1, 0 \leqslant \delta_i \leqslant p-1,$$

其中A的阶为$p^{n-\alpha}$,$A_i^{p_i}=1$。借助于拟基底,华罗庚改进了霍尔P.(Hall,1904—1982)的一个计数定理。他得到:若G是一个阶为n,秩为α的群,则ⅰ)当$2\alpha+1 \leqslant m \leqslant n$时,$G$仅包含唯一的$p^m$阶子群;ⅱ)当$\alpha < m < n-\alpha+1$时,$G$包含$p^{\alpha}$个阶为$p^m$的循环子群;ⅲ)$G$包含$p^{m+\alpha}$个满足$G^{p^m}=1$的元素。其中第二个结果分别改进了G. A.米勒(Miller)和A. A.库拉科夫(Kulakoff)的定理。

1948年至1950年,华罗庚在体论方面得到了十分漂亮的结果。在此之前关于体的结果屈指可数。华罗庚的结果十分简洁,主要结果有:1. 体的半自同构必是自同构或反自同构。2. 体的任意不等于自身的正规子体必包在中心当中。3. 非域的体的乘法群必不可解。E. 阿廷曾在他的《几何代数》一书中称以上结果1是华的漂亮定理。从结果1华罗庚导出体上一维射影几何基本定理。R.D. 布饶尔(Brauer,1901—1977)亦于同年给出结果2中的结论,早年H. 嘉当(Cartan,1904—)嘉当曾对其特殊情形进行过证明,故结果2称为嘉当—布饶尔—华定理。华罗庚的证明非常简洁。例如,在"On the Automorphisms of a Sfield"(体的自同构,载于Proc. of N.A.S. vol. 35,No 7,1949)一文中,华罗庚用两页多的篇幅证明了这个美妙定理。他从体的半自同构定义出发,所谓半自同构就是将同构保持乘法的性质改为

$$(aba)^{\sigma} = a^{\sigma} b^{\sigma} a^{\sigma}$$

华罗庚用半自同构定义一连串推出四个等式,第四个等式为

$$[(ab)^\sigma - a^\sigma b^\sigma][1-((ab)^\sigma)^{-1}b^\sigma a^\sigma]=0$$

于是便有

$$(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma \text{ 或 } b^\sigma a^\sigma$$

接着华罗庚又证明了如果有一对$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$，则对体上任意一对数 c, d 都有$(cd)^\sigma = d^\sigma c^\sigma$，这便完成了证明，简直是令人叫绝。

又如与上文隔了两个月发表于同一刊物上的"Some properties of a Sfield"(体的若干性质)，华罗庚在一开头就写出一个初等恒等式：如 $ab \neq ba$，则

$a=[b^{-1}-(a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)][a^{-1}b^{-1}a-(a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)]^{-1}$。

这一恒等式验证起来并不难。使人惊叹的是华罗庚是如何发现它的！这篇文章也不长，只有 4 页多一点。华罗庚从这个恒等式出发，一口气推出了 10 个定理，证明都十分简单。其中定理 2 即上面所列的结果 2："体的任一真正规子体必包含在中心当中"。H. 嘉当证明这个定理要假定体在中心上的秩是有限的，其证明方法要繁复得多。此外华罗庚还利用本文中的结果和他在另一篇文章中证明的定理得到体上射影特殊线性群的单性，即 $PSL_n(K)$是单群，除非 $n=2$ 且 K 中只有 2 或 3 个元素的情形。这个定理原来只有伯恩赛德、M. E. C. 若尔当(Jordan, 1838—1921)、迪克森对特征不为 2 或 K 为完全域时证明过。1943 年 J. 迪厄多内(Dieudonne, 1906—)也只对矩阵阶数 $n>2$ 时证明了定理，当 $n=2$ 时要除掉 K 的中心只有 2、3 和 5 个元素的情形。华罗庚的定理中除外的部分的确不是单群，因此华得到的是最终的结果，而且他的证法无疑是最简单的。

华罗庚在典型群领域的工作也是十分出色的。他在 1946 年就发表了关于典型群自同构的论文"Automorphism of real symplectic group"(实辛群的自同构，发表在前苏联杂志 Dokl. Akad. Nauk 53 卷，1946)，接着在 1948 年的文章"On the Automorphism of the symplectic group over any field"(关于任意域上辛群的自同构，发表于 Ann. Math. vol. 49, No 4, 1948)中他定出了在特征非 2 的任意域上辛群的自同构。华罗庚确定辛群自同构的方法可用到其他典型群上。华罗庚在典型群方面的工作充分显示出他的矩阵技巧，而且他的程序是从低维情形开始，然后用归纳法推广到高维的情形。

华罗庚与 I. 赖纳(Reiner, 1924—)合作确定了 $GL_n(Z)$和 $PGL_n(Z)$的自同构，Z 为整数环。他们还合作证明了 $GL_n(Z)$由三个元素生成，$SL_n(Z)$由两个元素生成，而当 $n \geqslant 2$ 时 $SP_{2n}(Z)$由四个元素生成。

矩阵几何的研究是始自华罗庚的。1945—1947 年间，华罗庚在研究矩

阵变元的自守函数时感到这种矩阵形成的几何很重要。当时他先研究数域上四类矩阵几何，即长方阵几何、对称阵几何、斜对称几何和埃尔米特阵几何。在这种几何中，矩阵是点。例如，长方阵几何：设 m,n 是正整数，所有基域 D 上 $m\times n$ 阶长方阵 $M_{m\times n}(D)$ 构成空间，每个 $m\times n$ 矩阵是其中的点，在这个空间上还有一个群在其上作用，这个群由变换 $X\to PXQ+R,\forall X\in M_{m\times n}(D)$（其中 P 是可逆 $m\times m$ 阶方阵，Q 是可逆 $n\times n$ 阶方阵，R 为 $m\times n$ 阶矩阵）生成。记这个变换群为 $G_{m\times n}(D)$，那么长方阵矩阵几何按照 C.F. 克莱因（Klein，1849—1925）的爱尔兰根纲领就是研究 $M_{m\times n}(D)$ 中的子集（即图形）在 $G_{m\times n}(D)$ 作用下不变的性质，并且用尽可能少的不变量刻画该几何的变换群。这个问题的答案即是该种几何的基本定理。

1945 年至 1947 年，华罗庚证明了上述四种几何的基本定理。他所求得的不变量有双射、算术矩阵、调和点集、连续性等。1949 年他将对称阵几何的基本定理推广到了任意特征不为 2 的域上。不变量减至双射和粘切（两个矩阵 X_1,X_2 粘切是指 $\mathrm{rank}(X_1-X_2)=1$）。

从矩阵几何和多复变函数论出发，华罗庚同时又研究矩阵分类问题，其中包括：复对称和斜对称在酉群下的分类，埃尔米特矩阵对在合同变换下的分类以及埃尔米特矩阵对在正交群下的分类，等等。

值得提出的是，1950 年华罗庚回国之后，开设典型群课及讨论班，培养了不少杰出人才，万哲先是其中的佼佼者，他曾与华罗庚合作写出《典型群》一书。华罗庚和他的学生的研究受到国外学者的高度评价，被称为典型群的中国学派。

华罗庚在搞矩阵方面是造诣很深的。他在 1947 年到美国一次作演讲后，韦伊评论说："华玩矩阵就像我们玩整数一样。"华罗庚认为这一评价说到了点子上。据刘绍学回忆，20 世纪 70 年代一次和华罗庚一起开会，休息时与他闲谈，华罗庚说："国外把我说成是玩矩阵的魔鬼……表面上你看我搞的是多复变函数和偏微分方程，实际上骨子里还是我的矩阵技巧。"（参见刘绍学写的自传，刊于《中国现代数学家传》第五卷，第 428 页）矩阵技巧中一项重要的事情是尽可能多地将矩阵元素化为零，行话叫"打洞"。华罗庚的学生以及学生的学生在他的熏陶下也渐渐学会这个技巧。曾有人戏称："龙生龙，凤生凤，华罗庚的学生会打洞。"据李尚志等说，华罗庚的学生出国后表现出的打洞技巧让外国数学家惊讶不已。

第三节 柯召：二次型和矩阵论，李华宗：矩阵论和克里福德代数

柯召生于1910年，1928年考入厦门大学数学系，曾受教于曾炯。后又考入清华大学算学系，得遇老师熊庆来和杨武之指导，并有同窗许宝騄和华罗庚互相切磋。柯召学业优异，于1933年毕业。1935年考上了中英庚子赔款公费留学生，赴英国曼彻斯特大学学习，师从L.J.莫德尔（Mordell，1888—1972）。莫德尔是著名数学家，关于椭圆曲线上有理点构成的群有一个莫德尔定理（即该群的秩是有限的）。关于方程的解数与亏格关系的莫德尔猜想直到20世纪80年代才得以证明，被视为当时一大成就；证明者德国数学家G.法尔廷斯（Faltings，1954— ）因此获得1986年的菲尔兹奖。柯召得到如此有见地、有才气的名师的指导是很幸运的。莫德尔将自己考虑了很久的题目交给柯召做，是关于二次型的。柯召不负师望，很快做出了一些结果。莫德尔十分满意，推荐柯召到伦敦数学会做报告，柯召成为登上这个讲台的第一个中国人。他1938年就在《伦敦数学会杂志》等英国著名刊物上发表了7篇论文。1938年柯召回国后，到四川大学任教。抗战期间，川大迁到了峨嵋。在艰苦的条件下，作为数学系主任的柯召毫无懈怠，他发起每周开设的专题研究课，召集全系师生从事研究，这样既推进了数学研究，又造就了一批新人。此时，李华宗也到了川大，与柯召合作写了矩阵代数方面的论文。

在20世纪三四十年代，柯召共发表了20多篇论文，主要领域为二次型、矩阵代数和不定方程。在二次型方面，主要考虑的是正定二次型表为线性型的平方和问题。1937年，莫德尔曾证明 n 元型所需的最小线性型个数 $Rn \leqslant n + 3$。而柯召对此给出一个简洁的证明，并于次年证明了 $Rn = n + 3$。1940年，他又对不定二次型给出了类似的结果（只是有些平方项前加以负号）。另外，对正定二次型不可分解型的存在性，柯召也做出极好的成果。

李华宗1911年生于广州，1933年毕业于中山大学数学系，毕业后曾在广西大学任教。1935年与柯召同时考取中英庚款留学生，赴英国爱丁堡大学留学。他读博士时作的论文是微分几何方面的。1933年李华宗获得博士学位后，到法国巴黎学习，听了一年E.嘉当的课。他1938年回国，也到

川大数学系任教,后又曾在武汉大学任教,1944年被中央研究院聘为数学研究所筹备处的8位兼任研究员之一。1948年李华宗因有肾病,南下到家乡澳门治疗,终因医治无效,于1949年逝世,时年仅38岁。

李华宗的研究范围非常广博,在很多数学分支中都做出很好的结果。下面仅列出代数方面的部分成果。

1945年,李华宗证明了特征非2的代数闭域上的克利福德(Clifford)代数是由n个元素u_i[其中$u_i^2=1, u_iu_j=-u_ju_i(i\neq j), i=1,2,\cdots,n$]所生成的$2^n$阶的结合代数,并证明了此代数是半单的。该结果得到A.A.阿尔贝特(Albert,1905—1972)很高的评价。

李华宗在矩阵方面工作很多,有4篇是与人合作的,包括他和柯召合作的"哈密顿-凯莱定理的进一步推广"及他自己写的"非负埃尔米特矩阵的规范分析",其结果都被写入了R.贝尔曼(Bellman,1920—1984)的著名教科书《矩阵分析导引》。

李华宗是我国最早研究李群的数学家。1947年,他对三维实李代数做了分类。他还利用张量讨论连通李群。

从1937年到1949年短短的12年中,李华宗勤奋地工作,写出了32篇论文,发表在中国、法国、英国、美国及荷兰等国的著名刊物上。李华宗的英年早逝,是近代中国数学史上的一大损失。

第四节 张禾瑞:维特李环的自同构和表示

张禾瑞1911年出生在一个官员家庭。自幼受到良好教育。1931年他考入北京大学数学系。当时系里聘请了德国教授E.施佩纳(Sperner,1905—1980)讲学,开选修课,内容偏重于代数。张禾瑞坚持选他的课,成绩优异,很受施佩纳赏识,临别时,他表示希望张禾瑞到德国留学。

1935年,张禾瑞从北大毕业,便远涉重洋赴德留学。施佩纳将他介绍给汉堡大学的阿廷。我们已经提到过,汉堡大学也是一个抽象代数研究中心,著名数学家阿廷、E.维特(Witt,1911—)都在汉堡大学。当时纳粹排犹,因为阿廷的夫人是犹太人,阿廷不久就被迫离开德国。他曾希望张禾瑞能到美国,并为他办了转学手续,但张禾瑞因经济关系未能成行。后来张禾瑞就在E.维特的指导下完成了博士论文。并于1941年得到了博士学位。

张禾瑞的博士论文题为"关于维特李环(Über Wittsche Lie - Ringe)"。维特对论文非常满意。直到1979年他给张禾瑞的信中还特别提到自己在审查一篇论文时说的一句话:"张禾瑞是维特代数方面有成就的一个先驱者。"

维特李环的定义是由维特首先提出的。一个维特李环L是在一个特征 $p>2$ 域 k 上的向量空间。L有基底 $e_0, e_1, \dots, e_{p-1}$,在其上定义乘法为:

$$e_i \circ e_j = (j-i)e_{i+j}$$

当时关于它已有的经典结果不多。张禾瑞的文章分为两部分。第一部分是讨论维特李环的自同构群,第二部分是讨论维特李环的不可约表示。在第一部分,文中将维特李环嵌入到多项式环 $k[x]$ 的商环 $k[x]/(x^p)$ 中。乘法定义为:

$$f \circ g = fg' - gf'$$

其中 f', g' 是 f, g 的微分,取基底为

$$e_i = x^{i+1} (i = -1, 0, \cdots, p-2)$$

对任一多项式

$$\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{p-1} x^{p-1}, a \in k, a \neq 0$$

可以定义一个L上的自同构

$$\sigma_{\varphi(x)}: f(x) \to \frac{f(\varphi(x))}{\varphi'(x)}$$

它满足

$$\sigma_{\Psi(x)} \sigma_{\varphi(x)} = \sigma_{\varphi(\Psi(x))}$$

文章随后证明了当 $p \geqslant 5$ 时,任一L的自同构必为上述形状。这就确定了L的自同构群G,G同构于多项式集合 $\{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{p-1} x^{p-1} / a_1 \neq 0\}$ 以复合为乘法 $\bmod x^p$ 所构成的解。

在第二部分考虑的是基域为特征 $p \geqslant 2$ 的代数闭域。文章开始引入了定理1,并在第二节里集中证明了它。定理1是说L的基底 e_i 在不可约表示下的象所具有的性质:设 $e_i \to E_i(-1 \leqslant i \leqslant p-1)$,则必有 $E_i^p = \varepsilon_i E (i \neq 0)$, $E_0^p - E_0 = \varepsilon_0 E (\varepsilon_i \in \mathrm{K})$。此处 E 表示单位矩阵。称 $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_{p-1}$ 为不变量,容易看出,因为当 $i+j \geqslant p$ 时, $e_i \circ e_j = 0$,所以当 $i > \frac{p-1}{2}$ 时, $\varepsilon_i = 0$,其中有一最小正整数 r 使得只要 $i > 2r+1$, $\varepsilon_i = 0$。这个整数 r 与不可约表示次数有密切关系。从定义可知 $r \leqslant \frac{p-1}{2}$,通过讨论表示模的性质,文章得到

了关于不可约表示次数的定理，分为三种情形：$0 < r < \frac{p-1}{2}$；$r = 0$；$r = \frac{p-1}{2}$，分别称为主要定理 1，2，3。我们将它的结果归纳如下：

若 $0 < r < \frac{p-1}{2}$，不可约表示次数为 p^{r+1}；

若 $r = 0$，此时不变量为 $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, 0, \cdots, 0$，根据 $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0$ 是否为 0，不可约表示次数分别为 $p, p-1$ 或 1；

若 $r = \frac{p-1}{2}$，不可约表示次数为 $p^{\frac{p-1}{2}}$。

张禾瑞文章所得的结论是非常重要而基本的，不光维特本人称他为一个"先驱者"，在 35 年后，即 1977 年的代数期刊上斯特雷德(Strade)的一篇关于李代数表示的综述文章还提到："35 年前，张禾瑞确定了维特代数 W(1) 的不可约表示，这是对非古典的单李代数的一个贡献。并且在相当长时期中，它是一篇关于这个方向的唯一的贡献。"1988 年，研究 p 李代数的名家威尔逊(R.L. Wilson)来京访问，对张禾瑞说："我曾把您的论文翻译成英文，仔细地加以阅读。"因此，张禾瑞的论文确实是一篇经典性的文献。

1946 年张禾瑞从德国回国，就任北京大学教授，开始了他的教书生涯。张先生认为在大学里应该开设近世代数课，这是一个数学专业人才必须具备的素养。当时国内只有一本萧君绛译的《近世代数学》(文言文的)。张禾瑞在 1947 年前后多次在北京大学开设近世代数课，并自己编写教材，由于他的学识渊博，教学又认真，得到了校内外的广泛好评，使得当时北平师范大学、北京中法大学、北京辅仁大学纷纷聘请他为兼职教授。这样，他就成为当时国内数学界的一位名教授。

第五节　段学复：有限群论、李群及李代数

段学复 1914 年生于陕西华县。1932 年从北师大附中毕业后考入清华大学算学系。清华大学在当时是中国数学的一个中心，老师有郑之蕃、熊庆来、孙光远、杨武之等人，还有研究生陈省身、许宝騄、柯召等。段学复在这里的学习条件非常好，特别是他常与华罗庚谈数学，华罗庚的学习方法对段学复有较大影响。1936 年段学复毕业后留校任助教。

抗日战争爆发后，清华大学与北京大学、南开大学合作在昆明成立了西南联合大学。段学复长途颠簸，于1938年5月到达昆明。

这时华罗庚已是西南联大的教授了。段学复为华罗庚的近世代数课刻写讲义和批改学生习题。他还参加了华罗庚的有限群讨论班，并开始与华合作研究 p 群的计数定理。他们合作写了两篇关于 p 群的论文。这是段学复从事代数学研究的开始。

1939年，段学复考取了留英公费生。由于第二次世界大战的爆发和日本侵华战争的扩大，交通甚是不便。段学复几经波折，终于在1940年抵达多伦多，并进入多伦多大学，师从 R.D. 布饶尔（Brauer，1901—1977）。布饶尔是德国犹太数学家，是有限群的模表示理论的创建者。在他的指导下，段学复成为研究模表示的第一位中国数学家。1941年，段学复获得硕士学位，后因布饶尔要到普林斯顿去工作，段学复也随师到了普林斯顿，转入普林斯顿大学数学系，在那里又遇到了 C. 谢瓦莱（Chevalley，1909—1984）。在布饶尔和谢瓦莱的指导下，段学复在有限群模表示论和代数李群两方面都做了出色的工作。他于1943年获得普林斯顿大学的博士学位。

有限群模表示论是将有限群用有限域上的线性群来表示，是研究有限群的一个工具。至今这仍是有限群理论的主流方向之一。段学复与布饶尔合作发表及自己独立发表了几篇论文。段学复原来研究的 p 群用了模表示论之后便得到了有力的工具，正所谓如虎添翼。首先，在1942年他与布饶尔合作发表了“关于有限群的一些注记”，文中用群特征标理论证明阶为 $3\cdot p^aq^b$ 形的群 G 若为单群，则 G 的阶必是 60(此时为交错群 A_5)或是 168(即为 F_7 上 2×2 射影特殊线性群 PSL(2,7))，该文中还证明迪克森在《线性群》一书中的单群表示直到 10000 以内都是完全的。段学复在1943年完成的博士论文“阶包含素数一次幂的群”内容很丰富：不但用模表示方法讨论了有限群得出了结果，而且在论证这些结果的过程中证明了模表示论中的一些结果。其博士论文中的主要结果：如果 G 是阶为 pg' 的群，g' 与 p 互素，而且 G 有一个次数 $<\frac{2p+1}{3}$ 的一一对应表示，则 G 必为下列三种情形之一：

(1)G 有一正规的 p 阶 p－叙洛夫子群 P。

(2)以 B 表示所有阶数与 p 互素且与 P 中任一元素可交换的元素构成的群。B 为正规子群，且 $G/B\cong PSL(2,p)$。

(3)$p=3$，$G/B\cong S_4$ 或 A_5；

$p=5, G/B \cong A_6$;

$p=7, G/B \cong A_7$。

特别当表示是不可约时,或是表示维数 $z<\frac{p+1}{2}$ 时,B 是 G 的中心,这样 G 的结构就全清楚了。这个结果改进了布饶尔原有结果。不仅如此,为了证明主定理,论文先证明了一些引理,其中在 §5 里有定理 A 和定理 B,在 §6 里有定理 C。这些都是关于模表示论中的重要事实,关于 G 群的布饶尔树的重要性质。后来定理 A,B,C 分别被霍尔(M. Hall)等人称为“Brauer - Tuan - Stanton 原则”、“Brauer - Tuan 指标分离原则”和“Brauer - Tuan 定理”。这个 Tuan 就是段学复。

1945 年段学复又发表了题为“On Simple Group of Finite order(有限阶单群)”的文章。文章研究了阶为 pq^bg^* 的单群,$(p,q)=1$ 且 $g^*<p-1$,则或者 $G \cong PSL(2,p)$ $(p=2^m \pm 1$ 且 $p>3)$,或者 $G \cong PSL(2,2^m)$ $(p=2^m+1$ 且 $p>3)$。作为应用,段学复证明了形如 prq^b $(p,r,q$ 彼此互素$)$的单群只能是阶为 60 或 168 的单群。

段学复用模表示论研究群论的这些工作是开创性的,是应用模表示论研究单体分类问题的早期的有重要意义的工作。

段学复从谢瓦莱处学到很多,并在代数的李群和代数的李代数方面做过研究。首先,他在 1945 年发表了一篇题为“关于幂零矩阵复型的注记(A Note on the Replicas of Nilpotent Matrices)”的文章。文章对于谢瓦莱的一个结果,即在特征 0 的域上任意幂零矩阵 Z 的复型 Z' 都是 Z 的数量倍数,给了一个直接证明。并将其推广到特征 p 的域上。他证明了这时 Z' 可表为 Z 的一个多项式,系数属于基域 K:

$$Z'=\sum_{j=0}^{m_0} t_j Z^{pj}$$

1945 年,谢瓦莱和段学复合作写了一篇文章“On Algebraic Lie Algebras(代数李代数)”。其中给出了代数的李代数的定义:设 K 是一个特征为 0 的域,$\mathfrak{gl}(n,k)$ 是系数在 K 中的 n 阶矩阵组成的李代数,$\mathfrak{gl}(n,k)$ 的子代数 $\mathfrak{g}$ 称为代数的,是指任一矩阵 $X \in \mathfrak{g}$,则 X 的每个复型也属于 $\mathfrak{g}$。在复数域 C 上,$\mathfrak{g}$ 是矩阵 X 的所有的复形张成的李代数,它也就是包有 X 所有复形生成的单参数群的 GL(n,C) 的最小代数子群的子代数。由此得到一个矩阵代数群,因此该李代数是代数的。文章主要说明反方向也是对的,即复数域 C 上,任一代数李代数都是一个矩阵代数群的李代数。这篇文章是摘要性

的，而后来由于段学复回国后与国外通信暂时中断，关于两个定义的等价性完整证明的文章迟至1951年才发表，那就是"Algebraic Lie Algebras and Their Invariants(代数李代数及其不变量)"。但其中定理2的证明已由日本人松岛(Goto Matsushima)在1948年用另一方法得到。这是很令人遗憾的事。不过上述二人合作的证明还是得到了很高的评价。A. 波莱尔(Borel，1923—)曾在演讲中提到："1940到1945年之间，谢瓦莱和段学复将代数群推广到其他域中。他们用的是李代数方法，对域的要求是域的特征为0。"

段学复1943年获得普林斯顿大学博士学位之后，继续在该校做了两年博士后，还曾到阿廷处作过4个月的访问学习，又为C.H.H. 外尔(Weyl，1885—1955)做了半年多的助手，协助他开设群论课，并帮他修订其名著《典型群》。1946年段学复回到阔别5年的清华园任数学系教授，并从第二年代理系主任职务。

第六节　王湘浩：代数数论

王湘浩1915年出生于河北省安平县槐林庄的一个农民家庭。自幼聪明好学，数学成绩一直很好。他的叔父学土木工程，是西北大学教授。在其影响下，王湘浩高中到天津北洋工学院附中上学，毕业后可直升入北洋工学院。但王湘浩对机械制图觉得难以应付，而对数学的兴趣甚于工科，于是在1933年放弃直升入北洋工学院的机会，到北京考入了北京大学算学系学数学。从此如鱼得水。由于学习成绩优异，在大学三四年级时，他每年可得到240块大洋的奖学金。

1937年毕业后，王湘浩到西南联大当了两年助教，1939年他做了江泽涵的研究生。1941年研究生毕业后，他先后在西南联大和北大当讲师。1946年经过考试，王湘浩被北大选送到普林斯顿大学留学，导师是E. 阿廷，即是我们曾提到的因纳粹排犹被迫从德国汉堡大学来到美国的著名代数学家。J. 泰特(Tate)和S. 兰格(Lang)当年正是阿廷的学生，是王湘浩的同门师兄弟。

王湘浩在普林斯顿大学期间最大成果是发现了格伦瓦尔德(Grunwald)定理是有错误的，并举出反例，然后做出定理的正确叙述和证明。

关于当时这件具有传奇色彩的事情,王先生自己很少说起。1982—1983年,丁石孙先生访问哈佛大学数学系时,恰好泰特是那里的教授,他曾对丁先生讲起王湘浩写论文的情况。他说有一天王湘浩先生到办公室来,告诉大家他发现格伦瓦尔德定理是错的,他有了反例。大家都很吃惊,因为这个定理有近20年的历史,阿廷本人讲课就讲过很多遍,而阿廷讲课是以严谨著称的,居然没有发现证明的错误。又过几天,王湘浩在办公室声明他已找到了正确的叙述和证明。阿廷后来告诉王湘浩,他已经完成了博士论文。据说这是数学方面最短的一篇博士论文。

格伦瓦尔德定理是类域论中的一个定理,它断言一种称为格伦瓦尔德扩张的存在性。什么是格伦瓦尔德扩张呢?设 F 是任意有限次代数数域,S 是 F 的一组有限个赋值,G 为一个有限阿贝尔(N.H.Abel)群。对每一个 $p\in S$,F_p 为 p 在 F 中的完备化。给定 F_p 上有限次扩张 K^p,且 $\mathrm{Gal}(K^p/F_p)$ 同构于 G 的一个子群。F 的一个阿贝尔扩张 K 称为格伦瓦尔德扩张是指 $\mathrm{Gal}(K/F)=G$,且 p 在 K 中的完备化恰为 K^p。格伦瓦尔德定理则说格伦瓦尔德扩张永远存在。

王湘浩在1949年曾设法证明一个关于代数数域中单代数上正则元素构成了群的定理,需要把格伦瓦尔德定理加以推广,这时他发现了格伦瓦尔德扩张不是永远存在的。后来他发现当 G 为阶 l^s(l 为素数)的循环群时格伦瓦尔德扩张存在的充分必要条件。这些结果发表于 Annals of Mathematics Vol.49(1948),1008—1009(关于格伦瓦尔德定理的一个反例)和 Vol.51(1950),471—484(关于格伦瓦尔德定理)上。

在第一篇文章中,王湘浩举了一个比较简单的反例说明格伦瓦尔德定理不是永远成立的。他首先陈述一个命题,即"如果 K 是 F 上 2^s 次循环扩域($s\geq 3$),则素数2或在 K 中完全分歧或至少有两个不同的素因子。"换句话说,素数2在 K 中不会仍是素元素。如果这个命题成立,那么可断言不存在8次循环扩张,因为这时2-adic域上的局部扩张也是8次,因此2一定还是素数。这个矛盾说明了格伦瓦尔德定理不是永远正确的。现在证明前述命题,假设素数2在 K 上仍是素数,那么在 K 中的子域 $F(\sqrt{m})$ 上也是如此,则 m 是形如 $8n+5$ 的数,故 m 的素因子不可能都是 $8n+1$ 形。找一个 p/m,而 p 不是 $8n+1$ 形。由 p 在 K 中的完全分歧,可知必有 $2^s\mid p-1$,得到矛盾。这便证明了该命题。

在此篇文章中王湘浩还分析了当时存在的两篇证明格伦瓦尔德定理的

文章，分别指出了他们的错误。

王湘浩深知格伦瓦尔德定理在证明代数问题中的作用，找出反例不是最终目的，因为有一些重要的代数定理是应用格伦瓦尔德定理的，其中包括一个单代数的著名定理，叫做布饶尔－哈塞（Hasse）－诺特基本定理。它的内容是："每一个代数数域上的正规单代数都是循环代数。"如果格伦瓦尔德定理有问题，则这个重要定理都要成问题了。因此王湘浩并未就此止步，他的第二篇文章就给出了当 G 为循环群时格伦瓦尔德扩张存在的充分必要条件。在文章中他给出了三种"特殊情况"：① $l=2$；② $F(e^{2\pi i/2^s})/F$ 非循环；③ S 外无奇偶赋值。奇偶赋值 p 即满足下式的偶赋值：

$$(F_p(e^{2\pi i/2^s}):F_p)=(F(e^{2\pi i/2^s}):F).$$

王湘浩证明了除去这些特殊情况，对阶 l^s 的循环群 G，格伦瓦尔德扩张必定存在。他还推出在特殊情况下格伦瓦尔德扩张存在的充分必要条件。利用他的定理仍可以证明正规单代数都是循环代数。而且他在第二篇文章中推出了一个更广的结果，从而使得他在 1950 年的一篇文章中证明了关于单代数的换位子群的定理，即"单代数中既约范数等于 1 的元素恰为其中换位子群中的元素。"

阿廷十分欣赏王湘浩，在他与泰特合作于 1950 年出版的 *Class Field Theory*（《类域论》）一书中，在目录中第十章名为格伦瓦尔德—王定理，其中部分内容就是根据王湘浩的结果写出的。

王湘浩得了博士学位后，立即准备回国。胡适曾劝他不要回国，留在美国或去台湾，王湘浩谢绝了这种劝告，毅然决定回国，于 1949 年 8 月回到北京。

回京后，王湘浩先被北京大学聘为副教授，半年后升为正教授。他除了在北大任课外，还在清华、北师大和辅仁兼课。王湘浩除讲授基础课外，还讲他的专长代数数论课，他在 1949 年秋曾在清华讲授代数数论。他在北大主持一个讨论班，是关于类域论的，参加者有聂灵沼等。这个讨论班在知识分子思想改造运动时中断。王湘浩还打算念韦伊的代数几何基础。当时，王湘浩是处于世界前沿水平的。可以设想如果我们一直沿着这条线走下去，我国的代数数论不至于落后得那么远，以致 30 年后要重新从基础学起。

第七节　严志达:李群的贝蒂(Betti)数

严志达出生于1917年11月8日江苏省南通县(今通州市)。严志达的父亲受新思潮和西方教育思想的影响,就读于江苏通州师范学校,毕业后从事教育多年。因此,严家经济虽不富裕,却是书香门第。

严志达自幼喜欢读书,他父亲有大量藏书,他读了不少,不但陶冶了情操,也使他对中国古典文学有很深的造诣。严志达从初中开始对数学产生浓厚兴趣,每日都做课外题,严济慈所著的《几何证题法》中的题目,他从头至尾一题不漏地做完,并立志要进入数学之门。

1936年,严志达考上清华大学物理系的公费生,这是为成绩好且需要资助的学生而设立的。抗日战争爆发后,北大、清华、南开三所大学先迁到长沙武汉大学,又迁到昆明,称为西南联合大学。严志达参加了由300余名学生组成的步行团,从长沙出发,跋涉几千里来到昆明的西南联大继续学习。由于酷爱数学,严志达到西南联大时从物理系转到算学系(1945年后改为数学系),物理系主任吴有训先生对这位高材生的离去深感惋惜。

当时,联大数学系有很多从国外归来的优秀教授,如陈省身、华罗庚、蒋硕民等。他们在联大开了不少当时处于世界前沿的数学课程及讨论班,如近世代数、数论、典型群、李群等。1939年陈省身、华罗庚与物理学家王竹溪合开了李群讨论班,据陈省身回忆"这在国内外都是先进的",而严志达是唯一自始至终参加这些讨论班的学生。他在这里如鱼得水,勤奋学习,不仅打下了坚实的数学基础,也开始学会如何做数学研究。他与陈省身合作写下的第一篇论文,得到关于积分几何的基本公式,称为陈—严公式。

1941年严志达从清华毕业,在云南大学任教。1946年他考取了中法交换留学生。1947年秋,严志达到法国斯特拉斯堡大学攻读博士学位,师从拓扑和微分几何专家埃瑞斯曼(C. Ehresmann)。埃瑞斯曼是卡当的学生,对卡当的理论有深刻的理解和领会。严志达在斯特拉斯堡学习一年后被聘为法国科学研究中心(Centre National de la Recherche Scientifique)助理研究员,直至1952年回国。

严志达对例外李群的贝蒂数的计算发生兴趣。非例外紧致李群的贝蒂数已由布饶尔、庞特里亚金(л. С. Понтрягин, 1908—1988)等大家所定出,然

而例外李群的确定难度要大得多。严志达于1949年2月14日和4月20日曾在法国科学院周会上做过两次关于例外李代数贝蒂数的报告,以摘要形式发表在科学院的"Comptes rendus"第228卷上。

粗略地说,空间或群 M 的贝蒂数是其同调群的维数。M 上 p 阶同调群的维数记作 b_p,称 M 的 p 阶贝蒂数,b_1 称为 M 的一阶贝蒂数。如果我们用 b_i 作系数,就得到庞加莱多项式

$$\sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

其中 $n=\dim(M)$,b_i 为 i 阶贝蒂数,$b_0=1$。所以计算庞加莱多项式就是计算所有阶贝蒂数。在严志达第一个报告中列出了四个例外李代数的庞加莱多项式:

F_4:$(1+x^3)(1+x^{11})(1+x^{15})(1+x^{23})$

E_6:$(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{11})(1+x^{15})(1+x^{17})(1+x^{23})$

E_7:$(1+x^3)(1+x^{11})(1+x^{15})(1+x^{19})(1+x^{23})(1+x^{27})(1+x^{35})$

E_8:$(1+x^3)(1+x^{15})(1+x^{23})(1+x^{27})(1+x^{35})(1+x^{39})(1+x^{47})(1+x^{59})$

严志达在第二个报告中说:"我们注意到某些对称空间的贝蒂数的计算比群本身的贝蒂数的计算要简单得多。直到现在,人们用直接计算来确定 F_4 和 E_6 型单群的贝蒂数还未成功,然而如果我们考虑相应于特征子群的(商)空间……就容易得到两个相应的庞加莱多项式。"严志达是用李群表示论计算的贝蒂数。

严志达的两个报告的推荐者都是卡当,可见卡当对他的工作的重视。严志达这项工作在数学史上占有一定地位。陈省身曾评论说:"志达对李群拓扑的工作是一个里程碑。"在《岩波数学辞典》和邓肯(Dynkin)的《四十年来苏联数学》中都对严志达的这一工作加以肯定,迪厄多内写的 *A Panorama of Pure Mathematics*(《纯粹数学概论》)在其所列的在李群理论中做出本质贡献的人中有严志达的名字。

第八节 周炜良:代数几何

周炜良1911年生于上海,出身于前清开明贵族家庭。其父是清末民初的数学家周达,为中国数学会的创始人之一。周炜良自幼由家庭教师辅导,

学习中国语文、中国历史及英文。他1928年赴美,1931年在芝加哥大学得到学士学位,一年后又获硕士学位。在芝加哥大学的岁月里,他渐渐地将兴趣集中于数学上。为了学习数学,他于1932年到达了当时世界上最大的数学中心格丁根,1933年他又转到了莱比锡大学。在范德瓦尔登的指导下,周炜良迈进了代数几何的大门。他与范德瓦尔登合作写出了影响深远的论文,并于1936年获得莱比锡大学的博士学位。同年他与德国女士玛戈特·维克托(Margot Victor)结婚,两人成为终身伴侣。周炜良成家立业后即返回中国。在南京中央大学任数学教授。次年抗日战争爆发,他滞留上海。1946年曾应同济大学之聘任数学教授一年。在国内的十年间,由于信息不通畅,所做的研究不多。

1947年,周炜良应普林斯顿高等研究所之邀请到美国做访问研究,从此进入他创造的黄金时期。1948年,由于研究成绩优异,他受聘于约翰·霍普金斯大学任数学系副教授,1950年升为正教授。1955年他再度到普林斯顿做访问研究,返回霍普金斯后不久,即就任数学系主任,长达11年之久(1955—1966)。1977年周炜良退休。

周炜良毕生从事的是代数几何的研究,对20世纪代数几何做出了重要贡献。以周炜良的名字命名的数学对象在《岩波数学辞典》中出现多次,诸如周坐标、周配型、周环、周簇、周定理等等,其中周坐标和周环是作为文中的标题而出现的,足见他的贡献之多。

代数几何研究的基本对象是任意维数的(仿射或射影)空间中,由若干个代数方程的公共零点所构成的集合的几何特性。这个几何叫做(仿射或射影)代数簇。在射影簇的情形,这些代数方程是齐次多项式。对代数簇的研究分为局部和整体两个方面:讨论代数簇的局部性质时是在仿射空间中考虑,而讨论整体或大范围的性质,通常是在射影空间中考虑。周炜良的工作大多是在射影空间中。

下面简述一下周炜良的工作。

一、周坐标、周型

这是周炜良最具影响力的工作之一,也是他在第一篇与范德瓦尔登合作的论文中提出的概念。阿布罕克(Shreeram S. Abhyankar)解释说,周坐标是格拉斯曼坐标的推广。格拉斯曼坐标是用于向量空间和子空间的。例如,V是$n+1$维向量空间,W是其$m+1$维子空间,则W可用一个$(m+1)$

$\times(n+1)$的矩阵表示，这个矩阵的所有$(m+1)\times(m+1)$阶子阵就是 W 的格拉斯曼坐标，共有 C_{n+1}^{m+1}个。除去一个常数因子外，由 W 唯一确定、与之对应的就是 n 维射影空间 $P(V)$中 m 维子空间 $P(W)$。全部 $P(V)$中的 m 维子空间集 $G_{n,m}$称为格拉斯曼簇。格拉斯曼坐标给出了 $G_{n,m}$在射影空间 P^N 中的一个嵌入，其中 $N=C_{n+1}^{m+1}-1$。

更一般的，如果想研究 P^n 中 d 次 m 维簇，我们就必须用到周坐标。作法如下：我们用 P^n 中一个退化的$(n-m)$维子空间 U 与一个给定的 d 次 m 维簇 Z 相交。d 个交点的坐标是 U 的格拉斯曼坐标的代数函数。通过选取该代数函数的一个对称函数，我们可以得到一个齐次多项式，这个齐次多项式就是 Z 的周型(chow form)，周型的系数就是周坐标。用这种方法，我们可以将全部 d 次 m 维簇的集合 $C_{n,m,d}$嵌入某个 M 维射影空间 P^M 中。周炜良在他的第一篇论文"Zur algebraische Geometry IX"(配型与代数几何)中证明了 $C_{n,m,d}$是 P^M 中一个代数簇。尽管该文由他和范德瓦尔登共同完成，但其中涉及周型的材料应归功于周炜良。周型在代数几何的诸多领域中已成为一个用途广泛的工具。

兰格曾提到，在格罗唐迪克(Grothendieck)发展代数几何时，构造了希尔伯特概型，有时可以绕过周坐标。但兰格指出："在一些问题中，希尔伯特概型比周簇使用起来更方便。然而，正如数学中经常出现的，它们两者中的一个在任何情况下都不能取代另一个。最近十年来(该文写于 1996 年)，周型和周坐标再次受到青睐，这归因于对能使定理有效的显示构造(而不是无效的存在性证明)的重新重视，并且由于代数几何计算方面的缘故，人们不仅需要理论的有效性，而且更需要求解几何问题的合适界限。就如在数值上有界的函数。像周型这样的射影结构非常适用于该目的。"

二、周环

1956 年，周炜良在 Ann. Math. 上发表了一篇很有分量的文章"On equivalence classes of cycles in an algebraic variety"(关于一个代数簇中的闭链等价类)。文章开始就谈到韦伊早就在他的《代数几何基础》一书的序言里指出拓扑与抽象代数几何有一个重要的不同，那就是在拓扑中相交理论可扩充到同调闭链类的代数上，而在抽象代数几何中，由于缺乏合适的概念，使得交叉积不是都可以定义的，这很不方便。周炜良写道："本文的目的就是去掉这个限制，使得我们在代数几何中也可以对闭链类加以运算，用适当选取

的闭链等价类概念来代替闭链自身,构成一个与拓扑中同调类代数相当类似的等价类代数。"

周炜良是如何定义闭链等价类的呢?我们做一粗略解释。设 V 是一代数簇,K 是 V 的定义域,X 是 V 中一个闭链,说 X 在 V 中 K 上有理等价于零链,是指存在一个 V 中在 K 上的闭链 X_u,X_u 在 K 的单超越扩张 $K(u)$ 上是有理的,而 X 与零闭链都是 X_u 在 V 中的特定化。两个闭链是有理等价的是指它们的差有理等价于零链。如果以 $G(V,s)$ 表示 V 中给定维数为 s 的闭链作成的群,$G_r(V,s)$ 表示等价于零的闭链作成的群,则 s 维闭链等价类群同构于 $G(V,s)/G_r(V,s)$。这个群是加法群,我们要想在其中定义乘法,那就是交叉积。周炜良定义了两个闭链的交叉乘法,并且证明了在闭链等价类上交叉乘法有确定意义,即不依赖于代表元素的选择,或说等价的两组代表元得到乘积闭链是互相等价的。于是周炜良将闭链等价类作成环。具体方法是,令 $G(V)$ 是 V 中全部闭链,将 $G(V)$ 写成直和

$$G(V)=\sum_{s=0}^{n}G(V,s)$$

零闭环也是直和

$$G_r(V)=\sum_{s=0}^{n}G_r(V,s)$$

定义环

$$H_r(V)=G(V)/G_r(V)\cong\sum_{s=0}^{n}G(V,s)/G_r(V,s)$$

这是一个有单位元的分次交换环,单位元是 V 本身,视为 m 维闭链,后来人们称 $H_r(V)$ 为周环。陈省身先生评价说:"相交理论是代数几何中的一个基本问题。周环有很多优点,并被广泛采用。"兰格说:"像其拓扑对应一样,周环已被证明在代数几何中是基本的。"

三、解析簇的代数性、周定理

射影空间 S_n 中的点集叫做解析簇,是指集中每个点在其邻域 R 内是解析的,也即 R 中的点是有限个方程(用仿射坐标)

$$f_i(x_1,\cdots,x_n)=0(i=1,\cdots,s)$$

的公共解,而这些 f_i 在 R 中是全纯函数。我们知道,代数簇是 S_n 中其齐次坐标满足有限个齐次多项式方程

$$\varphi_i(x_1,\cdots,x_t)=0(i=1,\cdots,t)$$

的点集。不难看出代数簇是一个紧解析簇。一个经典猜想即是反过来，一个紧解析簇是否也是一个代数簇。周炜良在1949年发表的"On compact complex analytic varieties"(关于紧解析簇)就证明了这个猜想。在文章中的定理V说:"射影空间 S_n 中一个紧解析簇是一个代数簇"，并且应用到解析簇的半纯映射上。定理Ⅶ说:"射影空间 S_n 中紧解析簇(因而也是代数簇) W_r 到映射空间 S_m 中的半纯映射是有理映射，且它的象 Y 是 S_n 中的代数簇。"

周炜良的结果发表后一直很受关注，定理V被称为周定理。20年后的1969年他自己又回到了这个问题。他发表了"On meromorphic maps of algebraic variety"(代数簇的亚纯映射)，认为关于半纯映射的象的结果可以改进，假设可以放宽。当时有一些人也在研究类似问题，如代数几何名家广中平佑(Hironaka)和松村英之(Matsumura)等人。他们的主要结果处理的是亚纯函数(即象空间是一维的)，他们断言，任一定义在代数簇 X 的子簇 Z 的某个连通邻域 N 中的半纯函数是代数的或是有理的。周炜良在文章中证明了更一般的定理，即这种性质对于某类代数齐次空间都成立，特别是这里包括了可表示为可约对称齐次空间的代数簇。称一个代数簇 X 是齐次的，是指在其上作用有一个代数群簇 $G: x \to g(x)$，而且对于任何元素 $x, x' \in X$，$\exists g \in G$ 使得 $g(x) = x'$。也就是说 G 可迁地作用于 X 上。通常这种 G 可以是辛群或正交群。该文中的主要定理是：设 X 是齐次代数簇，Z 是 X 中正维数的完备子簇，Z 生成 X(此处是在周炜良给出的精确定义下)，N 是 Z 的连通邻域，Y 是一代数簇，如果 F 是从 N 到 Y 的亚纯映射，则 F 是代数映射。

令人惊叹的是在1986年、当时已是75岁高龄的周炜良在文章"Formal functions on homogeneous spaces"(齐次空间上的形式函数)中他又回到了这个问题。在文章中他写道:"设 X 是一个群作用于其上的齐次代数簇，设 Z 是一个正维数的子簇，假定 Z 生成 X……人们会问是否 X 上沿 Z 的一个形式有理函数就是 X 上一个代数函数(或甚至是一个有理函数)沿 Z 的限制。在若干年前的一篇论文里，作者对此作了肯定的回答，但需假定子簇 Z 是完备的，而且结论仅适用于复解析情形，并要用定义在 Z 的邻域上的一般解析函数取代形式函数结论对于任意基本域上的抽象情形下的形式函数是否仍成立，问题依然存在。我们当时对此有所考虑，但因没能找到理想的解决思路，故而未作深究。最近的一篇论文中，法廷斯(Faltings)提起了同一问

题并用一个些微不同的公式对之作了不全面的解答。法廷斯的这一结果促使我们重新审视该问题,这一次我们比较幸运。事实上我们不仅能够解决这一问题,而且我只需使用与我们曾经用过的方法在本质上相同的方法。"周炜良终于关键地完善了这一理论。

周炜良在代数几何方面还有许多贡献,他共发表了34篇文章,可谓篇篇珠玑。如阿廷在1957年出版的几何代数书中曾说:"周1949年的论文'On the geometry of algebraic homogeneous spaces'(论代数齐次空间中的几何学)是射影几何最精彩的证明之一。"

周炜良从1948年起就在约翰·霍普金斯大学工作。从20世纪50年代他担任数学系主任开始,在他周围形成了一个代数几何团体。年轻的成员或在哈佛或在MIT,韦伊和扎里斯基(Zariski)教授常定期访问霍普金斯大学。1962年春,周炜良甚至说服了已回日本的小平邦彦(Kodaira)来霍普金斯工作,这时发展到了顶峰。约翰·霍普金斯大学教授井草准一(Jun-ichi Igusa)曾撰文说:"这个代数几何团体由周教授'创立'。这已成为一个历史事实,在表达自己尚处于朦胧状态的思想方面,周是相当开放和灵活的,我们常能看到这些想法如何升华为漂亮的定理,我们被他开阔的思想所折服并对他绝妙的几何直觉留下了深刻印象。"格罗唐迪克和其他人赞许地将他同扎里斯基领导的哈佛代数几何群体相提并论。

近年来,美国世界科学出版社(World Scientific)作为20世纪数学丛书之一出版了《周炜良全集》,由陈省身和绍库罗夫(Shokurov)担任编辑。这不仅为我们了解周炜良添加了便利,同时也是对周炜良最好的纪念。

第九节　萧君绛首译范德瓦尔登的 *Moderne algebra*(《近世代数学》)

本节我们通过我国数学家对范德瓦尔登的名著《近世代数学》的翻译,从一个侧面反映代数名词的定名情况。范德瓦尔登根据E.诺特和E.阿廷的讲义所写成的《近世代数学》于1930—1931年间出版。这本书对于近世代数的传播和发展起了巨大的推动作用,是一部经典著作。我国在1943年由萧君绛将此书译为中文文言体(萧君绛是武汉大学数学系教授,早年在日本帝国大学获学士学位),此书上卷是根据1937年版,下卷是根据1940年

再版本译出的。据老一辈数学家,如熊全淹、张远达、戴执中等回忆,他们都用过此书。熊全淹先生认为他的老师中,对他影响最大的有两位,一位是傅种孙,另一位即是萧君绛先生,是我国介绍范德瓦尔登的《近世代数学》的第一人。熊全淹先生专攻代数是受了萧先生的影响,如今他是国内知名的环论学者。我们此次写书为了解萧先生译本的来龙去脉,找了许多健在的数学家,不少人说用这个译本学习过抽象代数。北京师范大学的郝炳新教授还指点我们找到和他同校的吴品三教授,吴先生一直保存着他当年学习抽象代数时仔细读过的这个译本,发黄且书角已残破的书中有吴先生当年写的学习心得。范德瓦尔登的书后来几经修改再版,后又因其内容成为大学生普遍要学习的基础内容,书名遂改为 *Algebra*(《代数学》),去掉了"近世"这个形容词,足见这门学科在数学中地位的变化。萧君绛当时把 ideal 译为"伊德耶"(现译为"理想"),创意胜于现在的"伊妹儿"(E-mail)。直到 1962 年中国科技大学开设数论代数专业时,因为新译本出来时间稍晚,此书还在学生中传阅过。虽然此书现在已不流行,但它是一本起过历史作用的奇书。1963 年,我国的科学出版社出版了据新版译出的该书的新译本《代数学》第一卷,译者是丁石孙、曾肯成和郝炳新,由万哲先校。(第二卷于 1976 年出版,译者是曹锡华、曾肯成和郝炳新,校者是万哲先)

由于范德瓦尔登的这本书虽有较大增补和改写,但一直保持着原来的基本内容和风格,特别是章节目录变化不大,下面我们列出 1943 年和 1963 年两个译本的目录以资比较,从一个侧面看看代数名词译名的变化:

1943 年萧君绛译本目录

第一章　数与集合

1. 集合
2. 映像、浓度
3. 数列
4. 有限集合与可数集合
5. 类别

第二章　群

6. 群概念
7. 部分群
8. 关于元集合之计算、旁系
9. 同态与自同态

10. 准同态、正常部分群

第三章　环与体

11. 环

12. 准同态与同态

13. 商之形成

14. 向量空间与多元环

15. 多项式环

16."伊德耶"、剩余环

17. 可约性、素"伊德耶"

18. Euclid 环与主"伊德耶"环

19. 因子分解

第四章　有理整函数

20. 微分

21. 零点

22. 补间公式

23. 因子分解

24. 即约性之判定标准

25. 在有限多个步骤下因子分解之完成

26. 对称函数

27. 两多项式之终结式

28. 终结式之表为根之对称函数者

29. 有理函数之部分分数分解

第五章　体论

30. 部分体、素体

31. 添加

32. 单纯体扩张

33. 量之关于一斜体之一次关联性

34. 关于一斜体之一次方程式

35. 代数的体扩张

36. 单位根

37. Calios—域(有限可换体)

38. 第一种扩张与第二种扩张

24. 零点
25. 内插公式
26. 因子分解
27. 不可约性判定标准
28. 因子分解在有限步下的完成
29. 对称函数
30. 两个多项式的结式
31. 结式作为根的对称函数
32. 有理函数的部分分式分解

第五章　域论

33. 子体、素体
34. 添加
35. 单纯域扩张
36. 体上的线性相关性
37. 体上的线性方程组
38. 域的代数扩张
39. 单位根
40. Galois 域(有限域)
41. 可分与不可分扩张
42. 完全域与不完全域
43. 代数扩张的单纯性、本原元素定理
44. 范数与迹

从上面的节选对照可知,数学名词的翻译是在不断发展的。上面提到的 1933 年的会议上就讨论了数学名词审定问题。后经反复讨论于 1938 年以科学名词审查会的名义正式出版了《算学名词汇编》。随着数学学科的发展,数学名词不断增加,其中文译名的规范问题始终存在。解放后的 1956 年,中央人民政府政务院文化教育委员会名词统一工作委员会出版了《数学名词》,1964 年又出版了《数学名词补编》。到 1993 年,全国自然科学名词审定委员会公布了新的《数学名词》,共收入数学名词 8862 条,其中代数学与代数几何学分在一个部分,共收入词汇 2 128 条。这方面的工作仍在进行中。

第四章 时起时落的代数研究

(20世纪50—60年代)

第一节 背景

建国之后,对教育和科学影响较大的是院系调整。这是学习苏联的产物,它的积极方面是建立了一些新的专业性很强的高校,如以北京航空学院为首的"八大学院";同时调集一些优秀的科学家到相对比较落后的学校充实教师队伍,提高其教学水平,如王湘浩就到东北人民大学(吉林大学前身)创建数学系,目前吉林大学数学系在数学界还是很有影响的。但院系调整也有弊端,它不可避免地将原来的科研队伍拆散了。例如,清华大学数学系原先是十分强的,院系调整后,清华数学系解体,原有的教师分散到北大和其他地方。

20世纪三四十年代活跃的老一辈数学家,除了英年早逝者之外,在20世纪50年代时还都是年富力强的,他们担当起了繁重的教学任务(解放后高等院校的招生数目大大增加了),并成为科研的骨干。但由于政治运动一个接着一个,认为"搞基础数学无用"的"左"倾言论时时冒头,对数学研究冲击很大。许多满怀爱国之情回国效力的数学家常常在运动中挨整,甚至被加上叛国、反革命和其他莫须有的罪名。这样的环境自然会使他们的研究工作大受影响。但他们当中的大多数人总是无怨无悔,运动过后又带着学生继续前进。

下面先简述一下20世纪五六十年代国际上代数及相近领域的一些主要成果,然后分节叙述该时期我国代数学家的工作。

1951年 法国数学家H.嘉当(Cartan,1904—)与塞尔改进了层和以层为系数的上同调群的概念,使之成为现代多复变函数论和代数几何

的基本工具。

1952 年 美国数学家 D.蒙哥马利(Montgomery,1909—1992)和 L.齐平(Zippin,1905—)等证明任意有限局部连通的局部紧群是李群,解决了希尔伯特第 5 问题,推进了拓扑群理论的发展。

1954 年 德国—美国数学家 R.D.布饶尔(Brauer,1901—1977)证明关于有限群的二阶元素即对合的中心化子的定理,标志着单群分类工作的新起点,因而被称为布饶尔纲领,是有限单群分类工作的先驱。

1955 年 法国数学家 C.谢瓦莱(Chevalley,1909—1984)证明对复数域上任一单李代数 L,皆可选一组基使其结构常数都是整数,从而可构造一个相应的整数环 Z 上的李代数 L_z。这一结论是对有限单群分类的重大贡献。

法国数学家 J—P.塞尔(Serre,1926—)把代数簇理论建立在层的概念上,并建立了凝聚层的上同调理论。这为 A.格罗唐迪克(Grothendieck,1928—)后来创立起概型理论奠定了基础。

1957 年 法国数学家 A.格罗唐迪克把代数函数域理论中的黎曼—罗赫定理加以推广,给出广义的黎曼—罗赫定理。在其定理的证明中,第一次出现在一个概型 X 上的向量丛的格罗唐迪克群K(x),派生出很多代数 K 理论的工作。

1958 年 日本数学家永田雅宜(Napata Masnyosi,1927—)证明:存在群 Γ,其不变式所构成的环不具有有限个整基,即否定解决了希尔伯特第 14 问题,推进了不变式理论的进一步发展。

美国数学家 J.米尔诺(Milnor,1931—)证明可除代数只有实数域、复数域、四元数体和凯莱代数。

1959 年 日本数学家岩泽健吉(Iwasawa,1917—)得到一类数公式。开创了现代分圆域(添加单位根到有理数域而生成的扩域)理论研究。

1960 年 英国数学家 J.F.亚当斯(Adams,1930—)用拓扑方法解决了一个著名数学难题,极大促进了代数拓扑学的发展。他证明:除了 $n=2,4,8$ 这几种已知情形,不可在 R^n 上引进保持范数的乘法。

1963 年 美国数学家 J.G.汤普森(Thompson,1932—)和 W.菲特(Feit,1930—)合作发表文章:"奇数阶群是可解群",证明了伯恩赛德 20 世纪初提出的猜想。它标志着有限单群分类问题的一个重大突破。

1964 年 日本数学家广中平祐(Heisulke Hironaka,1931—)发展了扎里斯

基 20 年前在代数几何方面的成果,证明了著名的奇点解消定理:任意代数簇都是某个非奇异代数簇在双有理映射下的象。以后他又将此定理推广到一般复流形上,对一般的奇点理论做出了重要贡献。

1965 年 美国数学家 D.B.芒福德(Mumford,1937—)出版的《几何不变式论》,把 A.格罗唐迪克的概型理论用到古典不变式研究中,创立了几何不变式论,掀起了不变式论研究的新热潮,对代数几何学发展有巨大推动作用。

1967 年 H.巴斯(Bass)与合作者对函子 k_0, k_1 进行广泛研究。J.米尔诺给出函子 k_2 的定义。

1968 年 V.卡茨(Kac)和 R.穆迪(Moody)各自独立提出一类新的李代数。这种李代数可以看成复半单李代数(复数域上的半单李代数:半单李代数指不含非零可解理想的有限维李代数)在无穷维的很自然的类比。后称 Kac – Moody 李代数,是当代李代数研究的重点之一,与其他学科有广泛联系。

汤普森到英国剑桥工作,发表了"论其局部子群皆可解的不可解有限群",此文被誉为"有限单群理论中最为重要的文献"。

1970 年 美国数学家 D.G.奎伦(Quillen,1940—)给出高次 K 群($n \geq 3$)的定义,给出第一个计算 K 群的有效工具。

第二节 以华罗庚为首的中科院数学所的典型群研究

华罗庚在 20 世纪 40 年代已经在典型群方面做了不少很好的工作,并开创了典型群的"中国学派",其主要特色是纯熟地使用矩阵手法。

华罗庚搞典型群及典型群讨论班的初衷和过程在《典型群》一书的序中说得很清楚。《典型群》是华罗庚与万哲先合著的(1963),他们在序中写道:"早在 1949 年,本书作者之一就有了写这样一本书的轮廓,希望根据这个轮廓组织一个讨论班,和一批大学四年级及刚毕业的同学在一起,使他们边学边研究,集体地较整套地来进行这一领域的研究工作,一来可以使他们在工作过程中逐步地扩充自己的知识领域,另一方面可以让他们习作一些研究,

预计在计划完成之后,可以给典型群论、射影几何学、矩阵论及群表示论等数学分支以一个不同的面貌。1950 年初,当他在北京清华大学执教时,组织了这样一个讨论班。讨论班进行到 1951 年暑假,在讨论班里他完成了本书前六章的初稿。接着,在 1951 年下半年和 1957 年上半年,他又在中国科学院数学研究所代数讨论班里两度报告了前六章的大部分章节,并进行了一些修改。随后,从 1959 年下半年起,本书后一作者又在数学研究所代数讨论班报告了前六章的部分章节,并根据他所体会的前六章的精神与方法续写了本书的后六章,这就是本书简单的写作过程。"

对于为什么要以典型群为研究题目,他们又写道:"简单地可以这样说,体上的矩阵是一个值得注意的对象,因为它是一个不太失去普遍性的抽象事物,但同时又和成果丰富的具体的域上的矩阵论距离不远。当然,结合环、李环和柔丹环中有趣的部分又都有矩阵形式,而线性群、正交群、辛群、罗伦兹群也都是矩阵群。几何学中的线几何、圆几何、格拉斯曼几何都有矩阵的表示法。更如多复变函数论的典型域也离不开矩阵的表达形式。这些形成了我们的工作背景。"

第一次在清华大学的讨论班参加者有万哲先、丁石孙、曾肯成等;第二次在数学所(1951 年)的讨论班参加者有万哲先、丁夏畦、王光寅、张里千、邱佩璋等。1955 年秋,数学研究所成立了代数组,除了万哲先外,代数组还包括一些大学毕业分配来所的大学生,如潘一民、应玫茜等,以及 1956 年新分来的任宏硕、许以超。北师大的严士健也参加了讨论班的学术活动,并于 1957 年考取了华罗庚的研究生。华罗庚选择典型群作为代数组的研究方向和培养学生的好课题。1957 年上半年在讨论班上报告了《典型群》一书中前六章的主要章节。一时间,代数组里显得很兴旺。华罗庚关于典型群的主要结果是针对迪厄多内未解决的低维情形,这是解决起来比较困难的情形,主要有:当 K 为特征不等于 2 的体时,$GL_2(K)$ 和 $PGL_2(K)$ 的自同构的确定;$SL_4(K)$ 和 $PSL_4(K)$ 的确定。特别是对 K 为特征非 2 的域,S 为 4×4 非退化对称矩阵的情况下,决定正交群 $O_4^+(K,S)$ 和 $PSO_4^+(K,S)$ 的自同构,其中包括一种与大家所熟悉的自同构一点也不相似的自同构。当 $S=\begin{pmatrix}0 & I^{(2)}\\ I^{(2)} & 0\end{pmatrix}$,$I^{(2)}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,$O_4^+(K,S)$ 任一元素必为下列两种形状之一:

$\begin{pmatrix}A & yAL\\ xLA & (1-xy\det A)A'^{-1}\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0 & A'^{-1}\\ A & zAL\end{pmatrix}$,其中 $x,y,z\in K$,$L=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$,

A 是 2×2 非退化矩阵。(注:字义中矩阵$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$也记为 K,为了区别,现将其记为 L)

现设 τ 为 K 的一个自同构。由 τ 诱导出一个乘法群 K^* 到其自身的同态 $\varphi:\varphi(a)=\frac{a^\tau}{a}$。现在对 K 上 2×2 非退化矩阵 A,定义 $\chi(A)=\varphi(\det A)$,则这种另类的自同构为

$$\begin{pmatrix}A & yAL\\ xLA & (1-xy\det A)A'^{-1}\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}x(A)A & y^\tau x(A)AL\\ x^\tau L\chi(A)A & (1-x^\tau y^\tau\det(\chi(A)A))(\chi(A)A)'^{-1}\end{pmatrix}$$

或$\begin{pmatrix}0 & A'^{-1}\\ A & zAL\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & (\chi(A)A)'^{-1}\\ \chi(A)A & z^\tau\chi(A)AL\end{pmatrix}$

$O^+(K,S)$的自同构群是由上述自同构与熟知的自同构 $X\to PX^\sigma P^{-1}$一起生成的群,其中 σ 为 K 的自同构,$P\in GO_4(K,S)$。(GO_4 表示正交群)

此后,华罗庚和万哲先又解决了如下问题:①特征不为 0 的体 K 上,确定 $SL_2(K)$和 $PSL_2(K)$的自同构;②特征为 2 的体 K 上,确定 $SL_2(K)$和 $PSL_4(K)$的自同构;③证明了特征为 2 的体 K 和 K' 上,$PSL_4(K)$和 $PSL_5(K')$永不同构,$PSL_2(K)$和 $PSL_m(K')(m\geqslant3)$永不同构,$PSL_2(K)$和 $PSL_2(K')$同构当且仅当 K 与 K' 是同构或反同构,等等。

万哲先和严士健各自研究了将体上典型群自同构的结果推广到一般的环上。严士健的方法是将交换整环 R 嵌入到其商域中去,论证较为简单。用此方法严士健还对辛群得到与上述结论平行的结果。

从以上的介绍可知,华罗庚在 20 世纪 50 年代初开始的六七年间在出成果和出人才方面都有建树。

但是好景不长,讨论班只进行了半年多,反"右"开始了。华罗庚又被整了一下,紧接着大跃进,拔白旗、大批"白专",所谓"数学理论脱离实际"的论调又占了上风,以"厚今薄古"的口号排斥一些纯理论研究。成立了一年多的代数组被解散,年轻人纷纷离去,只留下万哲先一个人。数学所原有的体制被搞散了,按军事编制分为几个指挥部。华罗庚的数学工作被迫中断,后来他惋惜地说:"1957 年以前,我的研究工作是一个高峰接着一个高峰,1957 年以后就断掉了,很可惜。"对于严士健等改行,他也很惋惜:"刚刚有了这么

一点幼苗，一下子就连根拔掉了。”

第三节 颐和园龙王庙会议前后的学术氛围

1961年6月，在聂荣臻主持下，科学院与国家科委共同制订了《关于自然科学研究机构当前工作的十四条意见》（简称“十四条”）。聂荣臻又署名写报告《关于当时自然科学工作中若干政策问题的请示报告》（简称“报告”）报送中央。经中央批准，这两个文件下发给了全国。这两个文件在当时起到了扭转极“左”倾向的作用。特别是聂荣臻的“报告”明确指出“白专”这个提法不确切，建议废除“白专”这一用语。中国科学院为了贯彻这两个文件，制订了《中国科学院自然科学研究所暂行条例》（简称“七十二条”），做出更具体的规定。

同年夏天，代数、数论、拓扑等纯数学学科分别召开了学术会议。因为这是在颐和园龙王庙召开的，所以称为“龙王庙会议”。代数方面的龙王庙会议是在9月份举行的，参加者有段学复、王湘浩、张禾瑞、曹锡华、周伯埙、严志达、万哲先、谢邦杰、王世强、刘绍学、吴品三、石生明等人。与会代表先听了国家科委九局局长赵世英的报告。赵世英在报告中批判了“大跃进”中对科学研究的瞎指挥、浮夸风、拔白旗这些不尊重知识和知识分子的错误，并引用马列主义经典著作，指出“任务带学科”等等所谓“理论联系实际”的做法是实用主义。他还指出理论有“制高点”作用。与会者听了报告大受鼓舞，座谈时纷纷议论起当时的各种“左”倾、瞎指挥的事实，使得很多搞代数的人都改搞计算、统计、运筹等。华罗庚、万哲先、王世强、刘绍学等人在会上做了报告。会议还讨论了会后应如何搞的问题；大家明确了要归队，回来继续搞代数。曹锡华在“八十年回顾”一文中写道：“吉林大学著名代数学家王湘浩先生在会上谈：1955年我搞代数，1956年转搞计算数学，1957年回到代数，1958年又叫我去搞计算数学，1959年又回到代数，1960年又去搞计算数学。现在又要我去搞代数，那以后就逢单年搞代数，逢双年搞计算数学好了。”

1962年2月至3月间，国家科委又在广州召开了全国科学技术工作会议。陈毅受周恩来总理的委托做了对知识分子“脱帽加冕”的讲话，即摘掉“资产阶级知识分子”的帽子，戴上“人民的、社会主义的、无产阶级的科学

家"之冕。这极大地鼓舞了全国科学家。

在此形势下，1961年至1964年代数教学和科研渐渐得到复苏，慢慢走上正轨。在中国科学技术大学（简称科大）59级开设了数论代数专门化。段学复组织国内代数学家曹锡华、万哲先、丁石孙、曾肯成、郝炳新等人合力将范德瓦尔登的经典著作《代数学》译为中文，于1963年出版。段先生为此书写了"中译本序言"，短短一千多字，讲了代数学发展的历史，又讲了这本经典著作所起过的历史作用，以及书的各版的变化，出版新译本的意义等等。

第四节　华罗庚在代数方面的继承人万哲先

万哲先1948年从清华毕业，是段学复早期的几个得意门生之一（其他人还有丁石孙、曾肯成等人）。20世纪50年代，万哲先调入数学所后就跟着华罗庚学习。只有他自始至终参加了华罗庚的三次典型群讨论班。最后一次，由他报告华罗庚的书的前六章内容，并根据前六章的精神续写了后六章。从1962年起，科大59级开设了数论代数专门化。万哲先和曾肯成教代数。他还带着8名代数专业的学生作毕业论文，其中一部分人做矩阵几何，另一部分做有限几何。在万哲先的谆谆教诲下，基本上每个人都做出了达到学报发表水平的论文。例如，在矩阵几何方面，裴定一关于除环D上长方阵射影几何（即D上的格拉斯曼流形）基本定理的详细证明；刘木兰关于任意域上，当$n\geqslant4$时，$n\times n$交错阵几何和交错阵射影几何的基本定理的证明，等等。

有限域上典型群的几何学是典型群研究的继续和发展。它考虑有限域上n维向量空间F_q^n上面作用一个n级典型群，典型群可以是一般线性群$GL_n(F_q)$，辛群$Sp_n(F_q)(n=2\nu)$，酉群$U_n(F_q)$或正交群$O_n(F_q)$。典型群将一个子空间映为另一个子空间，称这两个空间是等价的，在这个等价关系下，就将这些子空间分为一条一条的轨道。于是我们就可以提出一系列问题：①怎样刻画子空间的轨道？②一共有多少条轨道？③每条轨道的长度=？④含有一个给定的子空间的一条轨道中子空间的个数=？⑤一个给定的子空间所含的一条轨道中子空间的个数=？1963年至1964年万哲先带领他的学生戴宗铎、冯绪宁和阳本傅，对于辛群、酉群和正交群研究了问题③，得到了解答。他们还利用各种几何中的一维全迷向子空间作为区组，用

任一轨道中的子空间作为区组构造了一批 PBIB 设计，并计算了他们的参数。这些结果都总结在《有限几何与不完全区组设计的研究》这本专著中，该书于 1966 年文化大革命前夕由科学出版社出版。他们的工作在国内外多次被引用。

万哲先在 20 世纪 50 年代中期曾参加段学复第一期关于有限群讨论班(1954—1955)，并参与写讲义。在 1956 年左右他也参加过北大的李群、李代数讨论班。1961—1963 年间，万哲先在中科院数学研究所李群讨论班上陆续做了专题报告。后来他根据这些报告的讲稿写成一本书《李代数》，1964 年由科学出版社出版。这本书系统阐述了复半单李代数的经典理论，适合初学者阅读。该书在 20 世纪 70 年代已在加拿大出了英译本。

第五节　北京大学和段学复在代数方面的研究

段学复在美国期间在有限群论和李代数方面做了出色的工作。抗战胜利后，满怀爱国热情的段学复毅然回国。1946 年他回到了清华，任数学系教授，第二年又任代理系主任。接下来的两年里，段学复积极地教课，不仅在北大连续开课，还应傅种孙先生邀请到北师大讲课，同时指导当时应届毕业生万哲先的毕业论文，指导曹锡华学习抽象代数和模表示论，并于 1948 年下半年推荐曹锡华赴美国密歇根大学做布饶尔的研究生(曹锡华在 1951 年获得博士学位)。在代理系主任时，段学复聘请了许宝騄、申又枨、王湘浩、庄圻泰等北大教授到清华兼课，并聘请刚回国的闵嗣鹤到清华执教。后来，华罗庚和程民德回国后也到清华执教。1949 年至 1952 年，清华大学培养出一批骨干人才，其中代数方面的有万哲先、丁石孙、曾肯成、裘光明、王萼芳等人。

1952 年院系调整后，段学复被请到北大数学力学系担任系主任，这系主任一当就当到了 1981 年。其间经历了一场场的政治运动，他作为系主任，不得不做出反应，因此十分繁忙。但段学复心中没有忘记教学和科研。1952 年至 1966 年段学复与系里其他同志一起培养出 2000 多名本科毕业生，包括许以超、沈光宇、蓝以中、徐明曜等代数方面的本科生，以及石生明、洪加威、李慧陵等研究生。他信奉“得天下英才而教育之，一乐也”，并认为能培养出胜过老师的学生是为师者的最大快乐。这反映了段学复的高尚品

德。

段学复很想沿着自己原来的方向继续工作，他曾在北京大学举办过两期有限群模表示论讨论班，第一期是在1954—1955年间，他与聂灵沼、万哲先合作撰写讲义，毫无保留提出了自己所理解的主要研究课题，指导王萼芳研究阶≤27000的有限单群，取得了成果。第二期是在1964—1966年间，段学复与王萼芳合作编写了讲义，参加者有西南师大的陈重穆及研究生洪加威、李慧陵等。段学复和他的学生计算出了单群J_1的指标表。在他们有可能取得突破性进展，而早于杨可(Z. Janko)找到新的散在单群时，"四清"和"文化大革命"开始了，我国在此方向的工作就停止了。此后不久，南斯拉夫人杨可发现杨可单群J_1，而国际上这方面发展迅速，在"文革"结束后的1979年，段学复先生应邀出席在美国加利福尼亚州圣克鲁斯召开的群论会议时，有限单群工作已经完成了。这段往事带给我们什么样的启示呢？

值得段学复先生欣慰的是在"文革"后，他的学生石生明转向了有限群模表示论领域，并协助他培养了博士生张继平等人。后来国内又有樊恽、张广祥等转入这方向的研究。10年来他们在这个领域已做了一批成果进入国际前沿。

许宝騄是北大教授中在代数研究方面做出贡献的另一位学者。他是国际知名统计学家，是建立多元统计分析的奠基人之一。在美国斯坦福大学统计系走廊中挂有一些国际著名统计学家的照片，其中就有一位是许宝騄。许宝騄早年毕业于清华大学，是柯召的同学。1936年到英国留学，因学习成绩优异，并在统计学中做出卓越成果，先后获得哲学博士和科学博士学位。1940年回国后即在西南联大任教，钟开莱、王寿仁和徐利治均是他的学生。1946年他应邀到美国教书，1948年回国后即在北京大学任教授，同年当选为中央研究院院士。1955年当选为中国科学院学部委员。

许宝騄在代数上造诣很深，作矩阵演算的技巧纯熟，尤其精通分块演算技巧。提到这一点，当时西南联大的学生，如曾肯成、徐利治等都深有体会。在多元统计分析中，原来用的是几何方法，要依赖几何直觉而没有严格的证明。许宝騄则引入了矩阵方法，将矩阵演算融合于分析的积分计算中，导出了漂亮的许公式，从而给出了严格又简洁的证明。许宝騄在多元统计分析方面的工作与他的矩阵的深厚功底是不可分的。正如美国统计学家安德森(T. W. Anderson)所评价："从1938年到1945年，许所发表的论文处于多元分析数学理论的前沿……如同一个有高度素养的数学家那样，许推进了矩阵

论在统计理论中的作用，同时也证明了有关矩阵的一些新定理。”

确实如此，在20世纪50年代，许宝騄发表了三篇纯代数文章，是关于矩阵变换的。许宝騄考虑的复数域上的矩阵变换有以下几种：

(1) $A \to B = PAP^{-1}$，其中 P 为可逆阵；

(2)阵偶 $(A_1, A_2) \to (B_1, B_2)$，

$B_1 = PA_1Q, B_2 = PA_2\bar{Q}$，其中 P, Q 为可逆阵；

(3)阵偶 A_1, A_2 中 A_1 为厄密阵(即 $A_1' = \overline{A_1}^{-1}$)，另一为对称或反对称阵，变换为

$A_1 \to PA_1 P', A_2 \to PA_2 \overline{P'}$，其中 P 为可逆矩阵。

许宝騄前两篇论文是为讨论(3)中的变换服务的，对(1)、(2)两类变换也得到了独立的分类结果及其他有趣的关于矩阵的结果。对于(3)，他不仅得到了所有可能的矩阵对的法式，同时指出当 A_2 是非奇异时，可取 P 为正交矩阵或辛矩阵，解决了厄密矩阵在正交群和辛群下的分类问题，并修正了华罗庚关于“凡偶阶的厄密阵都辛相联于‘二项的’直接和”的结论，得出了这一情况出现的充分必要条件。

许宝騄从1961年起就主持了试验设计讨论班，将矩阵方法引入了设计，并在1964年以“班成”为笔名发表了“部分平衡不完全区组设计”等论文。

许宝騄先生多年患有肺病，而他常年坚持带病工作。组织上多次安排他休养，但他都谢绝了，一个人领导三个讨论班。直至1970年12月逝世时，床边小茶几上还放着钢笔和未完成的手稿。

由钟开莱主编的《许宝騄全集》于1983年由斯普林格出版社出版。

下面谈谈聂灵沼和丁石孙两位的工作。王湘浩回国后在北大组织代数数论讨论班。聂灵沼在王湘浩指导下做过代数数论方面的工作。20世纪50年代初期，聂灵沼写过“关于类域论的互反律”(该文发表于1956年北京大学学报，实际上文章是1951年完成的)。文章内容是采用直接方法建立有限代数数域 F 上面的无限类域论。他直接定义了 $J_F \to G_F$ 的互反映射。聂灵沼证明了此映射的象集合是稠密的，J_F 是紧致的，于是上述映射是映上的。设其核为D，则有 $J_F/D \cong G_F$。

20世纪50年代中期，段学复、万哲先、丁石孙等组织过李代数讨论班，参加者还有郭悦成等。后来丁、郭都写了李代数方面的论文。丁石孙的文章“具有一巡回幂零微分的李代数”(北京大学学报，4，1958)考虑的是有一

个巡回幂零微分 D 的 n 维李代数 L, $D^{n-1}\neq 0, D^n=0$。文章证明，如 $n>3$ 则 L 必可解，并给出了 L 幂零的充要条件，并决定了非幂零 L 的四类不同自同构。郭悦成的文章为“可分李代数中出半单纯变换组成的极大交换子代数”。这段业务活动被“反右”运动打断了。

丁石孙曾发表感想：在 20 世纪 50 年代，虽然物资条件比现在更差，外国的文献到达时间比现在还要迟，但对于当时重要的文献还是可以读懂，并继续往下做。也就是说，我们和国际水平相差不是十分远。但是经过“反右”、反“右”倾、“四清”，特别是“文革”，我们停顿了大约 20 年。而这 20 多年来国外的代数、数论、代数几何发展十分迅速，学科互相渗透，概念更广，我们读不懂了，感到无从下手。要赶上国际先进水平不是一代人能做到的，可能要两代甚至三代人的努力。

第六节 北京师范大学在代数方面的成果

北京师范大学自傅仲孙当数学系教授以来，一直就对抽象代数比较重视，1947 年前后曾请段学复和王湘浩来校兼课，傅先生自己也讲授代数课。

院系调整后，张禾瑞从北京大学调到了北京师范大学。我们已说过，张禾瑞在 1941 年写出了出色的博士论文“关于维特氏李环”，对古典的单李代数表示是一大贡献。张禾瑞到北京师范大学后，担任代数教研室主任。他全力以赴工作在教学第一线，积极倡导并亲自讲授《近世代数》课程，亲手编写讲义。1952 年，他出版了《近世代数基础》一书。此书出版后多次印刷，在 1978 年修订本出版后就重印了 10 余次，总印数达几十万册。

自 1953 年开始，受教育部委托，在北京师范大学数学系举办了一届半年制的代数师资培训班，四届两年制的代数研究班，为全国高等师范院校培养了一批代数专业的师资。这期间，张禾瑞为研究生学员开了多门代数专业课，编写了模论、体论、结合代数、李代数等课程讲义。

北京师范大学在代数方面人才济济，除了张禾瑞外，还有王世强、郝炳新、吴品三、严士健、刘绍学，以及更年轻的一代。其中我们已经提到过严士健，他曾是华罗庚的研究生，在环上典型群的自同构方面做出过很好的成果。但在“大跃进”之后，改行搞概率统计，华罗庚为此感到遗憾。

王世强是著名的数理逻辑专家。他的代数功底十分深厚，在格论上做

了出色的工作。伯克霍夫(G. Birkhoff)所著《格论》一书中提出一些问题为待解决的,并编了号。其中第72和第31两个问题是关于合同关系的可换性的。王世强1953年在“关于合同关系的可换性”中对这两个问题进行了研究。解决问题72的一个特殊情形即证明了在一个拓扑模格L上的所有合同关系组成一个布尔代数的充要条件是,L的每个中立理想格皆为主理想格。对问题31,他给出了完全解答,即证明了:①一个有限拟群上任意两个合同关系都是可交换的;②对任意基数 $a \geqslant \aleph_0$,都含有 a 个元素的具有不可交换的合同关系的拟群和圈存在。王世强还利用模型论方法应用于数论和代数研究。在代数方面,他用模型论方法给出希尔伯特零点定理的推广,进而研究域上无限维向量和无限矩阵的性质,引入无限线性相关的概念,给出了无限方阵存在各种逆方阵的充要条件。

曾与张禾瑞合编教材《高等代数》的郝炳新20世纪60年代研究李代数,发表过很好的文章。吴品三在环与代数方面的研究有所成果,发表过20余篇有关环结构、根理论、有限环及拟环等方向的论文。

刘绍学1950年毕业于北师大,1953年留学苏联,师从库洛什(A. Г. Курош)。在那儿的3年中,他读了20世纪40年代以来环论方面的所有论文后,很快地做出论文,在国内学数学的留苏学生中第一个拿到副博士学位。在写论文的过程中,竟有过梦中得解的奇遇,足以见得他对所研究的问题是如何地专心投入。

刘绍学的副博士论文主要得到的结果,是将有限阶代数的定理推广到无穷阶代数方面,特别是到局部有限代数方面。一个代数称为局部有限的,如果任意有限个元素都可以包含在一个有限阶代数之中。刘绍学证明了两个结果,一个是局部有限代数借助于有限代数扩张而得到的若当代数仍是局部有限的。在此基础上,苏联数学家热夫拉科夫(Жевлаков)与刘绍学各自独立地证明了若当代数(或环)的Levitzki根存在。另一个是证明了局部有限代数借助于有限代数扩张而得的李代数,如它还是代数的李代数,则它必也是局部有限的。由此结果立刻可知可解李代数是局部有限的。他的这些结果多次被环论界的数学家们在专著与论文中引用。

刘绍学还研究了哈密顿(W. R. Hamilton)代数,即每一个子代数都是理想的代数,对其给出了完全刻画。

关于刘绍学20世纪70—80年代的工作以及探索新方向的事,我们将在下章详述。

第七节 吉林大学在环论方面的研究

在1952年院系调整时，王湘浩与徐利治、江泽坚、谢邦杰等一起到东北人民大学（即今吉林大学前身）组建数学系。东北人民大学原来只有文科，理科是新建的，没有教材，没有图书，只有来自四面八方的水平参差不齐的14名教师。他们全力扑在教学方面，不但自己一年教两、三门新课，还采取“师傅带徒弟”的方法，使新毕业的助教一两年内就主讲基础课。过好教学关后，王湘浩便组织代数、逼近论、泛函分析等讨论班，让青年教师和毕业班的学生学会读文献，做研究，很见成效。在1955年“东北人民大学学报（自然科学版）”创刊号上发表的数学论文就有21篇。

吉林大学数学系的代数研究以王湘浩与谢邦杰在环论方面的工作最为突出。环论的中心是环的构造问题。因为一般的环对根作商环后就成为半单环，所以研究环分三部分来做：①研究半单环；②根环、根理想和根的性质；③怎样由根 P 和商环 R/P 结合得到 R。

王湘浩在“学报”创刊号上发表了“关于 Köthe 半单纯环”，是研究问题①的。王湘浩得到 Köthe 半单环的分解定理，并详细讨论了交换环的情形。关于交换环，目前已知的结果是任意无幂零元素的交换环可以表为一些无零因子环的亚直和。王湘浩证明了一个无幂零元素的交换环可以表为一组亚直不可分环的亚直和，这种亚直不可分环或是域，或是所谓拟赋值环。在1957年该学报的第4期上，王湘浩又发表了“拟赋值环”一文。一个无零因子且非域的交换环 R 称为拟赋环，如果其中有一个非零元素 a 具下列性质：R 中任意非零元素整除 a 的第一次方幂，这是赋值环的推广。王湘浩还引进了半赋值的概念。半赋值是赋值概念的推广，是 R 上面一个函数 $\nu(x)$，它的值域为非负数及 ∞，且满足：(1) $\nu(a)=\infty$，当且仅当 $a=0$，2，(2) $\nu(ab)\geqslant\nu(a)+v(b)$，(3) $\nu(a^2)=2\nu(a)$，(4) $\nu(a+b)\geqslant\min(\nu(a),\nu(b))$，(5) R 中有一非零元素 a，使 $\nu(a)>0$。王湘浩证明 R 是一拟赋值环当且仅当 R 上有一个最强半赋值。

王湘浩在20世纪50年代末60年代初转向计算机科学领域，虽是代数界的一个损失，但他在计算机科学领域也做出了突出贡献。

谢邦杰1923年12月8日生于四川犍为县。自幼喜欢数学。上小学

时，就成了全班数学“答疑老师”，上中学后，数学常得百分。1943年，谢邦杰报考西南联大时，填写的三个志愿都是数学系。入学后他一直是班上的高材生。抗战胜利后，西南联大宣告结束，谢邦杰到北京大学数学系继续学习，1948年毕业后留校任助教。1952年全国院系调整，他与王湘浩等一起到东北人民大学数学系任教。谢邦杰和王湘浩一起为创建和发展数学系努力，在教学、科研、师资培养、教材建设诸方面，为吉林大学数学系的发展壮大，做出了重要贡献。

谢邦杰的研究领域是在环论方面，主要是关于幂零元素理想和幂零理想，是属于问题②的。一个幂零元素理想的上指数 n 是指对所有元素 a，使 $a^n=0$ 的最小正整数。谢邦杰得到了一个定理：“任意环 R 的上指数为 $n(>2)$ 的幂零元素左(右)理想恒含有 R 的上指数为2的幂零元素左(右)理想。而 R 的上指数为2的幂零元素左(右)理想恒为 R 的若干个幂零指数为2的幂零左(右)理想的并集。”作为这个结果的应用，他讨论了拜尔(Baer)环的上、下根何时相等问题，并把王湘浩关于Köthe半单环的构造定理推广到非结合环。

谢邦杰在环论工作中，充分利用零化子这个工具，并引入了零化子的升链、降链和双链条件，用这些代替通常的链条件，改进了前人关于幂零元素环某些结果。对于通常的升、降链条件，谢邦杰证明了“环R的右理想适合升(降)链条件必要且只要对于两边理想 $M_1,\cdots,M_n,R/M_i,i=1,\cdots,n$ 之右理想适合升(降)链条件，且 R 的包在 $M=\bigcap\limits_{i=1}^{n}M_i$ 中的理想适合升(降)链条件。”

1959年后，谢邦杰主要研究“具有半极小条件的环”，整数环、整数矩阵环、多项式环等常见环都是满足半极小条件的环。谢邦杰研究了具半极小条件的单纯环，得出了韦德伯恩—阿廷结构定理的各种推广，最后总结出三个主要的结构定理。

谢邦杰还修正了阿尔贝特(A. A. Albert)《代数结构》一书中的一个错误。他证明了“任取 J 必为 S^n 不变的充要条件为 S^n 在 J_0 上(J_0 是 S^n 一不变的不可约子代数)和在(基域)上所有的同构可交换。”

从1955年到1965年，谢邦杰共发表20篇论文，其中有不少是很有分量的。他是对我国代数事业颇有贡献的代数学家。

第八节 南开大学李群和李代数的研究

南开大学数学系的研究工作是由严志达领导的。1952年严志达怀着为祖国服务的愿望,毅然归国。回国后任南开大学数学系教授,直至去世。

严志达回国后开展了李群的研究工作和人才培养工作。从1954年起,他在南开大学主持"李群与微分几何讨论班",先后有10名研究生和青年教师参加,一直坚持到"文化大革命"前。虽然由于"左"的干扰,讨论班曾被迫几次中断,但只要形势一有好转便继续进行。这个讨论班为我国培养了一批活跃在这个领域的人才,也取得了一批引人注目的科研成果。

严志达在1952年回国后,致力于实半单李代数分类理论的研究。此问题与对称空间分类关系十分密切,故有基本的重要性,而H.嘉当所给的分类方法过于复杂。长期以来,有不少数学家试图找出一种统一而又简单的分类方法,但一直未能获得成功。严志达给出了较简单的方法。1959年他发表了相连的两篇文章,一篇是"实单纯Lie代数和它们的角图表示"(《科学记录新辑》,3卷7期,1959,213—217),另一篇是"实单纯Lie代数的自同构"(《科学记录新辑》,3卷7期,1959,218—220)。

这两篇文章的意义,严志达说得很清楚:

"实紧致李代数或复半单李代数,它们的结构可用Schlafli的角图表示。邓金(Е.Б.Дынкин)根据这个角图的性质给出了单纯紧致(或复)的李代数的分类新法,大大简化了H.嘉当和范德瓦尔登工作中的繁复计算。对于一个不一定紧致的实李代数,类似的角图还没有。本文介绍这样的角图,并且从角图的讨论给出实李代数的分类,因此可以免除H.嘉当、拉尔迪(Lardy)、甘特马赫(Gantemacher)等人工作中的繁复计算。所说的角图对于讨论关于实李代数的其他问题也很有用。在下一篇论文中我们将利用它来研究实单纯李代数的自同构。"严志达仔细地讨论了紧致单李代数的对合自同构,得出对应于自同构的特征根+1的特征子代数的结构,由此得到实单纯李代数的角图表示,并用它解决实单李代数的分类问题和自同构问题。

这项研究在当时与我国有密切交往的前苏联和东欧同行中引起巨大反响。苏联数学家西罗塔(Сирота)20世纪60年代以此为基础解决了实半单李代数的结构问题。日本数学家村上信吾(Murakami)在1965年才得到与

此类似的结果。

严志达还在曲面丛几何、二次外微分型等价问题等几何方面做了研究，取得不少成果。

从1953年起到1966年，严志达一共发表了18篇学术论文，很多篇是高质量的。他的学生也发表过不少论文。严志达还写了两本专著《李群与微分几何》（人民教育出版社，1960）和《半单纯李群李代数表示论》（上海科技出版社，1963），值得一提的是在他逝世前不久还出版了一本新作《实半单李代数》（南开大学出版社，1998）。

陈仲沪20世纪50年代在南开大学受益于严志达的讨论班，他曾发表过几篇关于实半单李代数的嘉当子代数的文章，并为李代数分解为一个半单李代数与一个极大幂零子代数之和给出一个直接且简单的证明。

第五章　我国代数学研究在停滞后的复兴

（20世纪70—80年代）

1966年开始的"文化大革命"，使我国的数学研究几乎处于完全的停滞状态。1972年起部分恢复了一些数学联系实际的活动，如一部分代数学家搞起的代数在编码方面的应用等。1976年"文化大革命"结束。1977年的全国科学大会，表彰了曾在科学上做出贡献的科学家，其中包括一批数学家。这使长期受压抑的数学工作者受到很大的鼓舞。1978年，邓小平同志提出改革开放的国策。随即一大批中国数学家走出国门，到欧洲各国和美国学习，朝国际数学研究的前沿追赶。当时出国的数学工作者大多是"文化大革命"前毕业的优秀大学生，年龄都已接近不惑之年，跟20世纪前期出国留学的年轻学子相比，学习新东西的难度更大些。但这批人发愤苦读，经过两三年的学习，不仅带回了新知识，也做出了一批成果。他们起到了承上启下的作用。他们的老师辈的学者，许多人凭着扎实的学术功底及经验，为年轻一代选择合适的研究方向，带领他们攻坚，取得了不小的成绩。使我国的数学教学与研究开始步入比较正常的秩序。

第一节　代数在编码和密码理论方面的应用

20世纪70年代，数字通信发展迅速，代数中的有限域，特别是二元域F_2显示了独特的作用，可见代数学在其中是大有可为的。

我国的代数学家看到代数在编码学和密码学中的应用，很快行动起来，

20世纪70年代初期，在华罗庚、柯召、段学复、万哲先、曾肯成等人的带领下，国内一批代数和数论工作者开始从事代数编码的研究和教学。中国科学院、北京大学、中国科技大学和四川大学等院校都有人在做这方面的工作。1972年，万哲先在中科院数学所组织编码讨论班，介绍国际上编码学和密码学的新发展，讨论班有讲义，参加者除了数学所的人外还有北大、科大、计算所、北京邮电学院(今北京邮电大学)、邮电科学研究院等单位的人。讨论班一直持续到1977年，为我国普及编码学和密码学做出了贡献。北京大学数学系特别办了短训班，为原来搞通信的人普及代数知识和编码知识，数学所的人也前往讲课。万哲先和他的学生多次组织编码学和密码学讲座，有不少单位邀请他们去讲课，他们的讲义一度被当成一些学校的教材。1976年万哲先撰写的《代数与编码》一书，由科学出版社出版。1978年，他与其学生戴宗铎、刘木兰、冯绪宁合写的《非线性移位寄存器》也由科学出版社出版。这两本书已成为相关领域的经典文献。在关于M序列的构造，m序列的前馈序列的分析和综合方面，万哲先及他的学生都做了系统的工作。在研究M序列的构造时，科大的林秀鼎参与了他们的讨论，因此，关于M序列的论文当时以数学所代数组和科大数学系联名发表。

20世纪80年代以后，研究领域逐步扩大，曾肯成、戴宗铎和黄民强等研究了环Z_{2^e}上的极大长线性递归序列的最高权位序列，或更一般地由最高权位和其他低权位组合生成的二元序列，这称为环导出序列。他们对环导出序列做了充分的研究，研究结果说明：环导出序列有非线性次数高、周期长、线性跨度大等优点，而且从Z_{2^e}上极大长线性序列到环导出序列是单射。

刘木兰带领她的学生开展了线性递归阵列和Gröbner基的研究。刘木兰将计算代数中的Gröbner基理论用于阵列研究。1994年她与胡磊证明，生成域上二维阵列A的线性递归关系的最小级数等于其在多项式环$F[x,y]$中的零化理想I_A的约化Gröbner基的多项式首项所决定的梯形窗口的整格点数。1998年，她和陆佩中利用交换代数中的局部化方法研究了域上、Quasi-Frobenius环上、伽罗华环上以及唯一因子分解环上的线性递归阵列。

曾肯成，1927年生于湖南湘乡，早年也是西南联大和清华的学生，是段学复的得意门生之一。建国初期曾肯成做过科学院苏联专家的翻译，并曾留学苏联。1957年受到不公正待遇被下放劳动，1959年分配到中国科学技术大学(后来在科大研究生院)教书，写教材。20世纪70年代中期，曾肯成

的研究兴趣转向密码学，1989年在他所领导的研究集体的基础上，成立了信息安全国家重点实验室，他担任实验室的学术委员会主任。他在密码学方面的主要成就，除了上面提到过的环导出序列以外，还有受到国际密码界广泛关注的“线性一致性检测攻击”和“线性校验子攻击”两种密码攻击方法，这两种攻击方法都是针对序列密码的。曾肯成利用这两种方法成功地攻击了詹宁斯(Jennings)以及马西(Massey)和拉佩尔(Ruppel)所设计的流密码发生器。1995年梅内泽斯(A. J. Menezes)等人编写的《应用密码学手册》(Handbook of Applied Cryptography)中对这两种攻击方法多次提及，并指出曾肯成的方法成功攻击了以上几种国际知名专家设计的流密码发生器。在该手册的参考文献中引用了4篇曾肯成与黄民强等合写的文章。在密码学研究中，曾肯成提出了保熵和熵漏的概念。熵在信息论中是描述随机变量不确定性的一个变量，在密码的设计和分析中，密钥的熵的变化量是一个重要的研究对象。曾肯成在研究环导出序列时引入“保熵”的概念，建立了“保熵”定理。他又将熵漏概念应用于美国数据加密标准DES中的S盒，发现在这些盒子中密钥最多有三种类型的熵漏，并对其分布进行了计算。在这些分析的基础上，对$V_4(F_2)$上的所有置换进行分类，建立了设计库，供设计S盒时使用。

裴定一在关于bent函数的存在性，Walsh变换以及认证码和代数几何码方面都有很好的工作。川大的同行在置换多项式方面做得较深刻。

我国学者陶仁骥和陈世华用有限自动机理论设计了公钥密码、数字签名及身份验证等，他们的工作很受重视。

西南电子科技大学有一个以肖国镇为中心的密码研究集体，他们在伪随机序列的复杂度、钟控序列、相关免疫函数等方面都做了许多工作，其中冯登国现任中国科大研究生院信息安全实验室主任。

第二节 典型群和有限几何方面工作的继续

1978年，《典型群》一书获全国科学大会重大科研成果奖，科学的春天到了。万哲先继续主持典型群讨论班。虽然这项工作在“文化大革命”中停顿了很多年，但万哲先与他的学生们很快进入了前沿，他们解决了一系列遗留未决的问题。众所周知，留下的问题大都是难啃的硬骨头。他们所解决

的问题有：1982 年，李尊贤确定了特征 $\neq 2$ 的域上三维定正型的正交群的换位子群的自同构。1987 年，他又证明了特征 $\neq 2$ 的域上四维定正型的正交群的换位子群的自同构，并指出对某些域有例外自同构存在。1985—1986 年间，李福安确定了特征 2 的域上无亏数的正交群的换位子群的自同构。1987 年，任宏硕、万哲先、吴小龙确定了任意除环上 2 级射影特殊线性群的自同构和同构，从而除环上线性群的自同构和同构问题完全解决，此项结果获 1987 年国家自然科学奖二等奖。1987 年，李福安、李尊贤确定了含 1 的交换环 R 上 3 级一般线性群 $GL_3(R)$ 和特殊线性群 $SL_3(R)$ 由平延生成的群 $E_3(R)$ 的自同构和同构，并指出有例外自同构存在，还指出环 Z_4 和 $F_2[x]/(x^2)$ 不 Morita 等价，但是他们上面的线性群却同构，这否定了奥马拉（O'Meara）和瓦塞尔斯泰因（Vaserstein）的一个猜想。

鉴于环上典型群与代数 K—理论密切相关，万哲先的学生们还开展了对代数 K—理论的研究。刘木兰和李福安对一类群环给出了 G_0 群和 G_1 群的计算公式。李福安还对与 K_2 函子密切相关的斯坦堡（Steinberg）群的自同构与同构等进行了研究。

20 世纪 80 年代初，曾肯成指导他的学生李尚志、查建国研究任意除环上典型群的极大子群，李、查二人位列我国培养出的首批 18 名博士之中。后来，李尚志一直从事这一问题的研究，并带领学生一起做，而且他还将他们关于典型群的子群结构方面的工作总结成书，名为《典型群的子群结构》，1999 年由科学出版社出版。

我国典型群的研究受到国外学者的高度评价，他们称我们为典型群的“中国学派”。1975 年访问中国的美国数学家代表团在 1977 年以“中华人民共和国的纯粹数学和应用数学”为标题发表的访华报告中，将我国在典型群方面的工作列为中国数学的五项成果之一。

有限域上典型群的几何学（简称有限几何）的研究实际上是典型群研究的继续和发展。我们在上一章中曾提到过，此项工作开始于 20 世纪 60 年代初，万哲先和他的学生们解决了问题③，即每条轨道长度的公式，并用这些参数构作了 PBIB 设计。当他们的专著刚刚出版时，“文化大革命”开始了，这项研究工作就此停顿了。直到“文革”后，万哲先和学生们发现，他们的工作在国外组合数学和编码的书中被引用，如麦克威廉斯（F. J. MacWilliams）和斯隆（N. J. Sloane）所著的 *The Theory of Error-Correcting Codes*（《纠错码理论》），等等。另外，国内有不少院校也开始继续做有限几何的研究工

作，用有限几何构作更多的 PBIB 设计。其中包括河北师范学院（现为河北师范大学）、成都师范专科学校、四川大学、上海交通大学、东北师范大学、哈尔滨工业大学、张家口师范专科学校等。

万哲先自己则返回头来研究问题①、②、④、⑤，并得到了完整的结果。为了研究问题④，他引入了奇异典型群，也研究了前述几个问题。他把这些结果连同 20 世纪 60 年代他与学生所做的结果总结为《有限域上典型群的几何学》一书，该书 1993 年由瑞典 Studentlitteratur 出版社与和英国的 Chatwell-Bratt 出版社联合出版。

万哲先搞有限几何是有明确目的的。20 世纪 60 年代是为数理统计中的实验设计，特别是结合方案的设计的需要而做；20 世纪 90 年代是由于发现有限几何可以用来构作认证码，他利用有限酉群和有限辛群上的几何都构作了认证码。有限几何还可用来解决有限域上一个型（双线性型、交错型、厄米型或二次型等）表另外同一类型的型的表示法个数问题，而且解决得十分彻底。有限几何还能计算某些射影码的 Hamming 重量和重量谱，等等。

第三节 北京师范大学开辟代数表示论方向的研究

“文化大革命”结束后，刘绍学重新步入代数殿堂。1978 年他开始研究的是有向图的路代数问题。所谓路代数，即是在有向图 Σ 中定义两条路的乘法，并将它线性扩充到向量空间 $F[\Sigma]$ 上，便使其成为一个结合代数。刘绍学与罗运伦、肖杰合作，在“路代数的同构”（载于《北京师范大学学报》第 3 期，1986，第 13—20 页）一文中证明了，若路代数 $F[\Sigma] \cong F[\Sigma']$，则 $\Sigma \cong \Sigma'$。这样便可以借助于代数工具研究图。1990 年刘绍学将上文的结果推广到赋值图的张量代数上，他在《中国科学》A 辑上发表了“赋值图的张量代数的同构问题”。文中得到定理：“两个赋值图的张量环同构，则两赋值图同构。”作为该定理的特例可再次得到关于路代数的同构定理。

刘绍学是一位负责的好老师。他虽然从 20 世纪 50 年代就在环论领域中工作并卓有成效，但在 20 世纪 80 年代初时觉得这一领域“既纯又窄，很像在沙漠中流淌的小河，对有漫长前程的年轻人不是一个好的科研方向”。于是，他决心寻找一个具有世界先进水平的新方向。可供选择的新方向很

多，要确定一个有生命力、适合自身实际情况，处于世界领先地位的方向，并不是一件容易的事。经过四五年的反复调查，最后选定了代数表示理论。这是20世纪70年代兴起的代数学的一个新的分支，主要是用范畴论、同调代数、代数几何和组合论等现代数学方法研究阿廷代数的结构，不可分解表示和模范畴的整体结构与同调性质等。它与代数学的其他分支，如有限群、代数群、李代数与量子群的表示理论和代数几何等，有着深刻的联系。刘绍学为学生们选这个题目的时机也恰到好处。因为20世纪80年代正是代数表示论发展的一个重要时期，形成了一些重要的理论，如遗传代数和箭图的表示理论，Auslander-Reiten序列理论，倾斜代数与导出范畴理论，以及代数的覆盖理论等。1985年，刘绍学与当时4个博士生（张英伯、郭晋云、唐爱萍和肖杰）开始学习代数表示论，他们克服了很大困难，坚持下来，终于用近2年时间攻克了这些基础理论。

为了更好地同世界接轨，跟上学科前沿，刘绍学有计划地邀请了当时国际上一流代数表示论专家来北师大讲学。另一方面，他又把自己的学生派出去留学，首先是陕西师大的惠昌常被公派留德，在刘绍学推荐下，他师从国际著名表示论专家林格尔（Ringel）学习代数表示论，并于1989年获博士学位。随后他参加了德国数学联合会在比勒菲尔德大学的重点项目“代数表示论”，于1991年回国，成为北师大第一个博士后，现为北师大教授。刘绍学与国际上代数表示理论的四大学派建立了良好关系，并将自己的博士生送往这四大学派处学习。其中张英伯到德国比勒菲尔德大学师从林格尔教授学习代数表示论，并于1990年获得博士学位，1990年肖杰到比利时安特卫普大学访问，邓邦明被派往瑞士苏黎士大学，在加布里埃尔（Gabriel）教授的指导下于1993年获得博士学位。1991年林亚南被派往德国比勒菲尔德大学，在林格尔教授的指导下于1994年获得博士学位。由北师大培养出来的代数表示论研究人员在国内代数界享有很高的声誉，在国际代数表示论界具有很大影响。著名的代数表示论专家、德国帕德博恩大学的伦京（H. Lenzing）教授说：“代数表示论最近出了几个新人，几乎都是中国人。”中科院数学与系统科学研究院万哲先院士曾给刘绍学写信说：“桂林（1992年中日环论）会议给我印象很深的是你们代数表示论搞得很有成绩，可以说这一分支已经在我国生根了，这是你的一大贡献。”10余年来，北师大代数组培养了一大批代数表示论人才，除了北师大的张英伯、惠昌常和邓邦明外，还有清华大学的肖杰，湖南师大的郭晋云，四川大学的彭连刚，中国科技大

学的章璞,厦门大学的林亚南等。他们都已成为相关课题的学术带头人。

北师大数学系代数表示论专业的张英伯、惠昌常和邓邦明等一直活跃在代数表示研究领域的前沿。他们在国内外重要刊物共发表论文近百篇(其中 SCI 收录 50 多篇),并被国内外同行多次引用;主要在以下几个方面取得了重要进展:

(1)确定了有限维代数的 Auslander-Reiten 箭图中的非循环稳定分支的一般形式,与哈佩尔(Happel)、林格尔和普赖泽尔(Preiser)在 20 世纪 70 年代对循环稳定分支的结果合在一起,完全刻画了 Auslander-Reiten 箭图稳定分支的结构。构造了一类有强齐次性质的正合野范畴;

(2)证明了给定一个 Tame 代数,对于任意正整数 d,几乎所有的维数小于等于 d 的模对间的维数与结构可以由有限多个一般模之间的态射集控制。在纳扎罗娃(Nazarova)与罗伊特(Roiter)及克鲁利(Crawley)–贝维(Boewey)的工作基础上,给出了一类重要的 tame 代数:Clannish 代数的不可分解模的完全的刻画,由此完满地解决了著名的盖尔范德(Gelfand)问题;

(3)建立了一般情况下的 Briman-Wenzl 代数,分划代数的胞腔(Cellular)理论和表示有限型 q – Schur 代数的结构和表示理论;

(4)在胞腔代数的研究中,提出了胞腔代数新的等价公理体系,从而建立了它的结构理论,Morita 等价理论和同调理论。证明了胞腔代数是拟遗传的充要条件是整体维数有限,或卡当行列式为 1。进一步利用卡当矩阵的谱研究了整体维数无限的一类胞腔代数。此后,证明了胞腔代数的拟遗传性又可用胞腔表示的上同调来刻画;

(5)在拟遗传代数的研究中,提出了对偶扩张构造方法,引入了 M – 组双代数和强对称性新概念,从而给出了拟遗传代数独特的构造方法和同调维数估算公式,以及特征模和林格尔对偶的组合方法。利用向量空间范畴和二次型得到了好模范畴有限型的一些判别法。证明了好模范畴有限时,自同态代数是遗传的,并精确描述了一类对偶扩张代数的特征模和林格尔对偶的箭图。证明了没有短循环的 Δ – 好模范畴一定是有限的,并且利用拟遗传代数的 Δ – 好模范畴的二次型,系统地讨论和研究了 Δ – 好模范畴的性质,建立了不可分解好模与二次型的根之间的对应关系;

(6)揭示了 Tame 代数与临界偏序集及倾斜理论的内在联系,证明了 Tame 代数的二次型的极小正根的每个分量都唯一对应一个临界偏序集,其元素构成偏倾斜模。对增长数较小的 Wild 遗传代数做了完整分类,这一结

果被德拉博(Dlab)和林格尔用于研究 Jones 指标中的问题;

(7)得到表示维数是 Morita 型稳定等价的不变量及张量代数表示维数的最优上界;

(8)完全确定了 Ringel-Hall 代数的结构,给出了其上的 R-矩阵,证明了它们满足基本的对称关系:量子 Yang-Baxter 方程。在整个 Ringel-Hall 代数上定义 Lusztig 对称子,证明了它们满足辫子群关系,从而解决了塞芬汉特(Sevenhant)和范德贝赫(Van der Bergh)的一个猜测,在塞芬汉特和范德贝赫的工作基础上,建立了 Ringel-Hall 代数的结构与著名的 Kac 定理与 Kac 猜想的本质联系;

(9)应用伽罗瓦覆盖理论,给出 controlled wild 的一个方便实用的覆盖标准,并将这一标准成功应用于局部代数、根方零代数、零关系代数及有限 p-群代数,证明了林格尔猜测对这四类重要的代数正确。应用覆盖和退化理论彻底解决了始于 20 年前的 two-point algebras 的分类问题;

(10)应用代数表示理论于线性动力系统理论,给出任意维数系统空间所有正则点的完全刻画,证明了坦嫩鲍姆(Tannenbaum)在 1983 年提出的 Matrices of maximal rank is a necessary condition of regularity 这一猜想。

目前,北京师大代数表示论专业主要研究方向和兴趣有:

(1)胞腔代数理论及其在其他学科的应用;

(2)拟遗传代数理论及其相关课题;

(3)代数及其模范畴的同调理论和若干猜想;

(4)Hall 代数和量子群;

(5)代数表示理论中的几何方法;

(6)矩阵问题和 Bocs 理论;

(7)代数表示理论方法在代数群,李代数及其相关学科的应用。

第四节　华东师范大学的代数研究与曹锡华

华东师范大学在代数方面的最重要人物当属曹锡华。

曹锡华 1920 年生于上海市。他从初中起就显露出对数学的兴趣,每周数学测验都得 100 分。1937 年 8 月 13 日,日寇侵略的战火烧到上海,17 岁的曹锡华毅然投笔从戎。他满怀爱国热情进入南京陆军交辎学校,毕业后

留校一年，后来被派到汽车兵第四团第一营第二连作中尉技术员兼修理班班长。因国民党军队腐败，曹锡华感到厌恶，便借请长假离开汽车兵团，到了重庆。所幸曹锡华参军时随身带了一本代数书，平时常翻一翻，因此在辍学三年后于1940年考入重庆大学数学系。当时重庆大学师资力量不强，曹锡华在李达先生的指点与推荐下转学到浙江大学。当时浙大在湄潭，拥有苏步青、陈建功、蒋硕民等优秀教授，使曹锡华受益匪浅。1945年曹锡华从浙大毕业。1946年他回到上海，巧遇陈省身这样世界著名的数学家，当时陈省身正在上海为筹建中央研究院数学所招兵买马，于是曹锡华被召进了数学研究所。陈省身亲自主持几个年轻人读庞特里亚金的著作，搞拓扑群讨论班。曹锡华在这里呆了一年左右，读了不少书。1947年春陈省身要到清华教书，曹锡华与吴文俊就跟着到了清华。曹锡华便跟着段学复学习有限群模表示论。这一年半中除了学习段学复和布饶尔关于模表示的文章外还自学了有限群论、李群、代数数论等课目。

1948年9月在陈省身和段学复的推荐和介绍下，曹锡华赴美国密歇根大学留学。他的导师就是布饶尔。由于曹锡华在国内读过了布饶尔的文章，所以去了之后就开始做研究。布饶尔给的题目是阶含有素数二次幂的群的构造。他在一年后写出了博士论文"On groups of order $g = p^2g'$"（关于阶为 $g = p^2g'$ 的群）。他主要证明了群 G 的指标强烈依赖于它的某些子群的构造，而这些子群可被阶恰为 p 除尽一次的群刻画。这样可以利用段学复的研究结果，同时考虑这些子群的正规化子的特征标与 G 的特征标之间的关系，即所谓局部理论。20世纪50年代在国际上是新发展的起点，曹锡华如果再从布饶尔多学几年，应该是极好的机遇。但此时新中国已经成立，曹锡华急于回国参加国内建设，因此于1950年9月匆匆回国，到浙江大学任副教授。

我们觉得，曹先生从1950年到"文化大革命"结束前的20余年，有很多无奈，总是不能掌握自己命运，没有多少时间搞自己喜欢和擅长的代数。曹先生在"八十年回顾"一文中说："运动一个接着一个，反右之后是向党交心，拔白旗，批判理论脱离实际，三面红旗，大跃进，大炼钢铁，等等。知识分子弄得晕头转向，不知所措。"曹先生只能在运动的短暂间歇时期忙里偷闲地搞点代数教学和研究。

1952年院系调整后，曹锡华调到华东师范大学。1954年他被任命为初等数学教研室主任，曾组织了数论讨论班，念哈塞的数论书，但大部分时间

泡在初等数学上。1956年提出“向科学进军”,华东师范大学数学系招了一届代数研究生班。曹锡华几乎是一个人给学生讲线性代数、近世代数、群论、环论、域论和代数数论等课程。在此期间,曹锡华翻译出版了庞特里亚金的《连续群》,他还将有限群方面的工作整理发表在数学学报上,用模表示方法考虑了阶为 $p^2g^2r^b$ 的单群并得到一些结果,发表在华东师大学报上。

1957年反右运动展开,经1958年大批判之后,党总支领导明令曹锡华要改行搞应用数学,他不得已搞起概率论,后又到物理系,在无线电实验室装配收音机。直到1961年,陈毅在广州为知识分子脱帽加冕。在北京龙王庙会议后,曹锡华从段先生那里了解到近几年国际上对有限单群的研究工作进展神速,主要有谢瓦莱1954年在日本杂志上发表的文章,段先生准备沿此路搞李群、李代数模表示论、有限单群等。回到上海后,曹锡华先从李代数学起,翻译了雅各布森(N. Jacobson)所著的《李代数》一书,并为五年级代数专业组的学生开了抽象代数、李代数等课程。1964年毕业的邱森写了一篇关于低维李代数的文章,发表在华东师大学报上。

正在此时,“四清”和“文化大革命”开始了,一切研究设想都被打断。曹先生被诬陷,关牛棚,揪斗、审问……不堪回首的十几年苦难可以想见。终于熬到了改革开放的年代。1977年曹锡华和万哲先组织了一个李型单群研讨会。仔细研读了卡特(R. W. Carter)所著的《李型单群》一书,确定了代数群这一研究方向。为此他认为需要形成一支老中青结合的科研梯队,培养高质量的研究生。1978年初,曹锡华招进了一批很用功,能力又很强的研究生,其中包括王建磐和时俭益等。曹先生培养研究生用的也是“请进来,走出去”的办法,他先后请了黎景辉和汉弗莱(Humphreys)教授到华东师大讲课,特别是后者,在华东师大讲了两个多月,他还提出了不少研究题目,如“是否模的张量积都有模滤过?”这个题目后来王建磐将它解决了,并得到国际同行的好评。后来曹锡华又陆续请来了黄和伦、卡特、扬岑(Jantzen)、安德森(Anderson)、帕歇尔(Parshall)和斯科特(Scott)讲学,使华东师大数学系水平不断提高。另一个措施是派中青年同志陆续出国学习。陈志杰去了法国的斯特拉斯堡,跟随希夫曼(Schiffmann)做了概齐次空间方面的工作,回国后他和肖刚在数学系建立了代数几何据点,做出许多重要的工作,并培养了许多高水平的博士和硕士。邱森和刘昌昆到美国麻省州立大学跟随汉弗莱做李代数工作,回国后邱森与沈光宇在数学系建立了李代数据点,也培养了不少学生。时俭益在曹锡华这里获得硕士学位后,就去英国沃里克大

学跟随卡特学习，得到博士学位，他的博士论文是关于 *An* 型群的胞腔分解，以黄皮书形式发表。曹锡华的博士生席南华在代数群和量子群中都做出很好的工作，如他在 Springer 出版的专著 *Representation of Affine Hecke Algebras*（《仿射黑克代数的表示》）比较完全地解决了关于 *p*-adic 群不可约表示分类的 Deligne-Langlands 猜想何时成立的重要问题。

在曹先生的组织和策划下，华东师大数学系的代数研究已形成老中青梯队。此时，华东师大培养的学生有些到数学所作博士后（如席南华），或到系统所万哲先处攻读博士学位以后再到数学所作博士后（如孙笑涛，吴新文）。他们都表现出良好的学术素养，可见曹先生的研究生水平是很高的。

在此我们还要提一下华东师范大学的另一位老先生，那就是朱福祖。朱先生于 1916 年生于北京，1936 年考取了浙江大学数学系，1938 年转入四川大学学习，这期间柯召、李华宗、李国平等先后在川大任教。朱福祖在此聆听了这几位大师的高等代数、群论和数论，并参加了柯召等教授的专题讨论班，这使他对代数和数论产生了浓厚的兴趣。1940 年朱福祖从川大毕业，留校做助教。在柯召教授指导下，朱福祖在 1941 年便写出第一篇论文。1942 年他到同济大学任教。1952 年院系调整后，朱福祖被调到安徽大学。1953 年他被调回上海，到华东师大任教直至今日。朱福祖在华东师大 50 年有余，除了认真热心地教学外，还做了大量研究工作，发表论文 30 余篇，并培养了多名研究生。

朱福祖的研究主要是二次型方面的。他在关于二次型的算术理论方面做了不少工作。例如，不可分解型二次型一定是不可分二次型，但反之却未必成立。1986 年，朱福祖在其论文“论二次型的不可分解性与不可分性”中证明了一个定理：在幺模二次型的情形下，不可分解性与不可分性是一致的，此问题多年前由 P. 爱尔特希（Erdös，1913—1996）和柯召提出来的。该结果被写入康韦（J. H. Conway）– 斯隆（Sloane）写的黄皮书 *Sphere-Packing Lattices and groups*（G. M. T. p. 290）。

值得注意的是，朱福祖的大部分论文都是年过 70 以后写的，一直到 89 岁，他还有作品问世，正是“老骥伏枥，志在千里”。

第五节 代数数论方面的工作

我国的代数数论起始于20世纪三四十年代在国外的学者，如曾炯在代数函数域方面的工作，华罗庚与闵嗣鹤判定二次域为欧氏整环，并建立了向量值的模形式(今称为Siegel模形式)，特别是王湘浩关于格伦瓦尔德定理的工作，等等。他们当时都很年轻，但他们所研究的问题大多是前沿的。曾炯回国后过早去世，因而他的工作没有人接着做下去；柯召回国后带领朱福祖等学生继续搞二次型；华罗庚和闵嗣鹤对所做课题均有贡献，但问题最终被达文波特所解决。王湘浩回国后，将赋值论、类域论这些新内容在北京大学和清华大学都讲过，并有人跟着他做。我们已经说过聂灵沼做过类域论问题，他也做过赋值论的问题。另外，研究过赋值论的还有戴执中、管纪文、黄明游等。由于王湘浩被调到吉林大学去建立数学系，北大这里没有人指导，加之运动频繁，因而从20世纪50年代中期以后，代数数论研究差不多只剩下柯召的二次型问题。20世纪50年代末60年代初，王湘浩转到计算机科学上。虽然，他在计算机科学上也搞得很出色，但代数数论研究却趋于中断。

就在我们停顿的20多年中，国际上数学的各门学科都发展迅速。为了解决非阿贝尔扩张的问题，代数数论与代数几何、群表示论、同调代数等学科交织在一起，产生了许多新概念，同时涌现了一些活跃领域，如模形式理论，椭圆曲线理论，自守表示理论，而且还有把这些全联系起来的朗兰斯(Langlands)猜想。

我国的学者只能奋起直追。为了从事代数编码理论的需要，1974年开始，万哲先在数学所组织代数数论讨论班，该讨论班一直延续到1978年，相继参加的有王元、聂灵沼、丁石孙、冯绪宁、戴宗铎、刘木兰、陆洪文、冯克勤、朱福祖、李德琅等，从代数数论课本学起，直到最新进展(当然开始时是似懂非懂的)。1978年北京大学开始招收代数数论研究生，赵春来和张贤科是我国第一批代数数论研究生。

1979年起，在改革开放的形势下，我国的很多数学工作者走出国门学习新东西，其中有一小部分人是学习代数数论的。他们大多学习了国外的新成果，有些人回国后带领年轻人继续搞。另外他们从国外请专家来讲课，

其中比较著名的有韦伊、志村五郎(Shimura)、兰格、鲁宾(K. Rubin)、扎吉尔(Zagier)等。

近 20 年来，中国代数数论学家做出不少有价值的成果。如王元对于代数数域上加性方程的研究工作；陆洪文、冯克勤、张贤科、李德琅、监以中、赵春来等人关于某些数域和函数域的类群结构、类数特性及分圆单位系的工作；裴定一关于半整数权模形式的工作；冯克勤、赵春来、张绍伟关于椭圆曲线的工作；聂灵沼和李德琅关于类域论的工作；朱福祖及其学生关于二次型算术理论的工作。下面我们就其中的一部分予以简单介绍。

一、半整数权模形式

1980 年前后，裴定一到美国进修，由志村五郎指导。当时半整数权的模形式研究状况是权$\geqslant 5/2$的已解决，即可分解为爱森斯坦(F. G. M. Eisenstein)形式空间和尖点形式空间的直和。权为 1/2 的情形也为塞尔(Serre)和德利涅(Deligne)证明。裴定一解决了剩下的权为 3/2 的情形，从而最终解决了半整数权模形式这一重要课题。裴定一还明显构作出权为 3/2 模形式空间的一组基，并将结果用于讨论三元二次型的整数解问题。

二、实二次域的高斯猜想

高斯对虚二次域和实二次域的类数都做了猜想。关于虚二次域的类数的若干猜想均已解决，而实二次域类数的猜想至今未能解决。此猜想是说：类数为 1 的实二次域有无穷多个。

为了解决该猜想，首先要刻画类数为 1 的实二次域。陆洪文对类数为 1 的实二次域做了深入研究，得到了实二次域类数为 1 的判别条件。这个判别条件成为国外学者使用的基本工具。下面我们列举陆洪文得到的两个结果：

设 D 为无平方因子整数($D\geqslant 2$)，Δ 和 $h(D)$ 分别是实二次域 $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D})$ 的判别式和类数，令 $w=\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}$，若 $D\equiv 1(\mathrm{mod}4)$，或 $w=\sqrt{D}$，若 $D\equiv 2,3(\mathrm{mod}4)$，$w=[a_0,\overline{a_1,\cdots,a_k}]$是 w 的连分数展开。

定理 1(陆洪文，1979)　以 $\lambda_1(D)$和 $\lambda_2(D)$分别表示不定方程 $x^2+4yz=\Delta$ 和 $x^2+4y^2=\Delta$ 的非负整数解个数，θ 是由 D 和 w 的连分数展开容易决定的整数，取值为 0,1,2，则有

$$\sum_{l=1}^{k} a_1 + \theta \leqslant \lambda_1(D) + \lambda_2(D)$$

等号成立当且仅当 $h(D)=1$。

定理 1 的推论包含了不少前人的工作。

定理 2(陆洪文,1981) $\zeta_k(s)$是实二次域 $Q(\sqrt{D})$的 zeta 函数,对于 $1\leqslant l\leqslant k$,令

$$[a_l, a_{l+1}, \ldots] = \frac{P_l + \sqrt{\Delta}}{2Q_l}, P_l, Q_l \in Z$$

则 $h(D)=1$ 的充要条件为

$$\zeta_k(-1) = \frac{1}{60}\sum_{l=1}^{k}\left(a_l Q_{l+1} + \frac{a_l(a_l^2+5)}{6} Q_l\right)$$

1991 年,陆洪文的专著《二次数域的高斯猜想》由上海科技出版社出版,该书系统和完整地阐述了高斯关于二次数域的三个猜想,包括很多前人的工作,也包括他本人的工作。

三、椭圆曲线的 BSD 猜想,同余数

设 E 是有理数域 Q 上一条椭圆曲线,记 E 上有理点全体为 $E(Q)$,从莫德尔的一个定理可知 $E(Q)$是有限生成阿贝尔群。设 $L_E(s)$是椭圆曲线 E 的 L 函数,BSD(Birch 和 Swinner-Dyer)猜想说明 $L_E(s)$和群 $E(Q)$之间的关系:

①群 $E(Q)$的秩 $r(E)$等于 $L_E(s)$在 $s=1$ 处零点的阶 $R(E)$。

②如果 $r(E)=0$(即 $E(Q)$是有限阿贝尔群),则

$$\frac{|E(Q)|^2}{C_E} L_E(1) = |Ш(E)| \qquad (*)$$

其中 $Ш(E)$是 E 的泰特—沙法列维奇群,C_E 是与 E 有关的一个实数。

1989 年,鲁宾对于有复乘的椭圆函数证明了式(*)两边均为正整数,并且它们的奇数部分相等。1988—1990 年,冯克勤对于一系列具有复乘 $\sqrt{-1}$,$\sqrt{-3}$和$\sqrt{-7}$的椭圆曲线 E 证明了 $r(E)=R(E)=0$,而且(*)式两边的偶数部分也相等,从而对这些曲线,整个 BSD 都是正确的。

冯克勤还做了与此相关的同余数问题,并且用图来刻画非同余数。从一无平方因子整数的因子分解作一个图,设 $n=p_1p_2\cdots p_l$,p_i 为各不相同的素数,则图的顶点集合为$\{p_1,p_2,\ldots,p_l\}$,从 p_i 到p_j 有弧当且仅当$\left(\frac{p_i}{p_j}\right)$

$=-1$。如 $p_1, p_2, \ldots, p_l$ 中至多有一个素数模 4 同余于 3,则由二次互反律可知$(\frac{p_i}{p_j})=(\frac{p_j}{p_i})$,这时图可成为无向图。

定理(冯克勤,1993)　设 $l \geqslant 1, p_1, p_2, \ldots, p_l$ 是不同的奇素数,

①若 $n=p_1p_2\ldots p_l$,其中 $p_1 \equiv 3(\mathrm{mod}8), p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots \equiv p_l \equiv 1(\mathrm{mod}8)$,并且 $G(n)$ 为奇性图,则 n 为非同余数。

②若 $n=2p_1p_2\ldots p_l$,其中 $p_1 \equiv 5(\mathrm{mod}8), p_2 \equiv p_3 \equiv \cdots \equiv p_l \equiv 1(\mathrm{mod}8)$,并且 $G(n/2)$ 为奇性图,则 n 为非同余数。

对于 $l \leqslant 3$ 的上述 n,BSD 猜想成立。

尽管近 20 年来我国的数学家在代数数论上取得不错的成果,但在我国搞代数数论和懂代数数论的人在数学家中占的比例很小。因为这是一个困难的题目,打基础所需的时间就很长,一个难题可能好几年才做出来,甚至几年都做不出来。在他还未做出时会感到压力,顶住这种压力是不容易的,这是现在这个社会的价值观所决定的。众所周知,证明费马大定理的 A. 怀尔斯(Wiles,1953—)曾为此问题“面壁七年”,但为免除怀疑,还是每隔 6 个月交上一些“小论文”,最后终于成功。如何为年轻人设置宽松的环境,培养和组织他们攻克难题还是值得研究的问题。

丁石孙 1982 年访问哈佛大学时,正值德国数学家法尔廷斯证明了数论中的莫德尔猜想。当时格里菲思(Griffiths)评价说:“德国在第二次世界大战后数学成了废墟,沉默了 30 年。这 30 年中,他们做了两件事:一是学习世界上的新东西,二是认真教书,把这些新东西教给年轻人。现在终于见了成效。”格里菲思还认为:“中国的数学家也应该这样做。”丁先生很赞成这个观点。所以他在哈佛时并未热衷于写论文,而是甘当人梯,努力去学新东西,回国后讲授给学生。中国最早的椭圆曲线课程就是丁先生讲的。在当了全国政协副主席之后,丁先生还到北大给研究生讲类域论。现在北大的赵春来等都效仿丁先生的做法,在学习新东西和培养新人上面下功夫,并已初见成效。

第六节　南京大学的代数研究与周伯埙

周伯埙生于 1920 年,1942 年毕业于金陵大学,留校任教。1946 年参加

教育部举办的全国统一留学考试被录取，1947 年赴美留学，到芝加哥大学师从艾伯特(A. A. Albert)，1949 年获硕士学位。后来因艾伯特离开芝加哥到外地工作，周伯埙转入俄勒冈大学，1951 年获博士学位，论文题目是"The density of the sum of sets of Gaussian inteters"(高斯整数集合之和的密度)。为了参加新中国的建设工作，周伯埙得了学位不久就回到母校，被聘为副教授。1952 年院系调整时调进南京大学，1963 年升为南京大学教授。

周伯埙教授在数论和代数方面都做出过成果。在数论方面，对加法数论中的密率论，他在 20 世纪 50 年代做出了与当时国际水平相当的结果。

在代数中的环论方面，周伯埙定义了一种素性环的概念。1950 年匈牙利数学家富克斯(L. Fuchs)定义了素性理想的观念。设 R 是一交换整环，A 为 R 中一理想，一元素 $x \in \mathrm{R}$ 称为素于理想 A，如果只有 $a \in A$ 才能 $ax \in A$。显然 A 中元素不素于 A，如果不素于 A 的所有元素也构成理想 A'，则称 A 为素性理想。素理想一定是素性的，因为如果 A 为素，则不素于 A 的元素只能在 A 中，即 $A' = A$。因此素性环是素理想的推广。周伯埙定义：一个交换环 R，如果其中每个理想都是素性理想，则称 R 为素性环。他证明 R 是素性环的充要条件是 R 中所有素理想组成全序集，他得到了素性环是赋值环的充要条件，并将素性环的概念和充要条件推广到非交换环。他还研究了某些素性环上的特殊化问题。

周伯埙教授在矩阵的特征值方面也做了一些工作。在数理统计中常要考虑正矩阵，即所有元素都为正数的矩阵，矩阵绝对值最大的特征值，称为极大特征值。关于次大特征值，研究结果甚少，称次大特征值与极大特征值之比为优势比。20 世纪 60 年代，最好的估计是奥斯特洛夫斯基(A. M. Ostrowsky)的，他得出优势比 $\leqslant \frac{M-m}{M+m}$，$M$，$m$ 分别为矩阵的最大和最小特征值。周伯埙研究了优势比等于 $\frac{M-m}{M+m}$ 的充要条件，即：要求矩阵阶为偶数，矩阵之元素只能为 M 或 m，并严格以一定规律排列。

周伯埙教授更为难能可贵的是重视数学发展的新方向，不断探索，并带领学生填补我国数学的空白点。南京大学师生从多重线性代数转向了对左模张量积的研究，并研究了张量积的同调维数的问题。为了表彰周伯埙在左模张量积方面的工作，1978 年江苏省科委颁给周伯埙省科技进步二等奖。1978 年中国数学会在成都召开了年会。在代数组会上，周伯埙强调了同调代数的重要性，并应邀在中国数学会代数学科组召开的"同调代数研讨

会”(1979 年,哈尔滨)上主讲“范畴与同调代数”,将这门在国外已研究了 30 多年的学科系统地介绍给中国的代数学者,还据此讲稿写成了《同调代数》一书。在周伯埙的指导下,南京大学代数组的师生在环的同调维数方面做了很多工作,并主办了第一届全国代数学术研讨会。在此期间,周伯埙正确地意识到,代数 K 理论有着更宽广的发展前途。在 1986 年第二届全国代数会上,他又做了“从仿射概型到代数 K 理论”的报告,倡导国内数学工作者能从事这方面的研究。南京大学数学系代数组也增添了 K 理论这一研究项目。周伯埙教授身体力行,在古稀之年仍与佟文廷合作做了 3 篇关于同调代数和 K 理论的文章。1994 年,他们的科研项目“代数结构的同调与代数 K 理论”获得国家教委科技进步三等奖。他还培养了 17 名硕士和 7 名博士。1990 年初,周伯埙的学生以 70 篇论文庆祝周老师 70 华诞。如今周先生已年过八旬,仍在孜孜不倦地工作。

第七节　武汉大学在有限群和环论方面的研究

武汉大学数学系与中国代数的关系是不一般的。首先,我国英年早逝的两位优秀数学家都与之有缘。曾炯 1922 年中学毕业后考入武昌高等师范学校(武汉大学前身),受到陈建功先生的教诲,于 1926 年从这里毕业。另一位是李华宗。李先生 1938 年从法国回国后先在川大任教,1942 年到了武汉大学(抗战时校址乐山)任数学系教授,直到 1946 年秋赴上海任中央研究院数学研究所筹备处研究员,专门搞研究。武汉大学数学系曾希望李华宗在研究工作之余来此作短期讲学,李先生曾说起此事,称他将为高年级开设“伽罗华理论”一课,并以范德瓦尔登的《近世代数学》为教材。遗憾的是李华宗因患肾病而未能如愿。

武汉大学的萧君绛将范德瓦尔登的《近世代数学》这部经典作品译成中文,于 1943 年出版,此书由武汉大学数学系发行,激发了数学系师生学习代数的热情。其中最突出的是张远达和熊全淹,他们毕生致力于代数学的研究和教学,成为半个世纪以来武汉大学代数方向的代表人物。

张远达 1914 年生于汉阳,1939 年毕业于武汉大学,留校做研究助理。1952 年起担任武大数学系主任。1955 年,张远达被派往莫斯科进修,师从库洛什学习群论。1956 年回国后曾到中科院数学所从事群论研究。1957

年回武汉大学继续担任系主任。从 1956 年到 1963 年，他发表了 4 篇文章，其中关于有限群构造的一篇证明了：若群 G 的阶等于 n 个相邻素数之积($n \geqslant 2$)，其中最小素因子 p_1 不小于 $n(n-1)+1$，则 G 为巡回群。他的证法主要是证明数论中一个辅助定理：当 $m \geqslant 2, m \neq 5$ 时，在 m 与 $2m$ 之间的素数至少有$[\sqrt{m}]$个。因$\sqrt{p_1} \geqslant \sqrt{n(n-1)+1} \geqslant n-1$，故 p_1 与 $2p_1$ 之间至少有 $n-1$ 个素数。1965 年，他准备总结一下研究成果，写专著《有限群构造》，但刚做好写作提纲和研究计划，"文化大革命"开始了。在"文革"中他被打成"资产阶级反动学术权威"，多次遭到批斗，游街。但无论什么样的艰难困苦都不能改其志。1972 年，张远达从农场回到武汉大学，立刻一头钻进图书馆，顶着压力开始研究起群论，并继续写自己的专著。在 1978 年初，他的专著脱稿。1982 年《有限群构造》这本专著由科学出版社出版。改革开放之后，张远达将工作重点从科研转向教学。他认为："任何个人的努力都比不上一代接一代地向科学冲刺。"张远达是一个好教师，他讲课声音洪亮，条理清楚。1978 年，恢复研究生制度，张远达一下收了 17 名研究生。他忍着病痛，为研究生讲了五个学期的课，并指导 17 个人做不同的毕业论文。同时他还教着几个年级的大量基础课。超负荷的工作量使张先生积劳成疾，于 1985 年因病去世。

从 1978 年到 1984 年，张先生一共培养了 26 个研究生，这些研究生大都在群论和群表示论方面工作，继承和发展着老师的事业。

熊全淹生于 1910 年，从 1934 年自武汉大学数学系毕业后即留校任教。半个多世纪他从未离开过武大，他以校为家，为武大奉献了一生。熊先生是国内知名的环论学者，他总是埋头做事，与人无争。从代数教学实际出发，熊全淹下决心编一套以环论为主的代数教材。他认为，一本书要说清该书的目的，解决什么问题，这个问题是怎样提出的，又是用什么方法解决的，这个方法的必然性，以及目前国际上与此有关的情况又如何。熊全淹夜以继日地工作，经过多年，终于完成了这套书。它们是：《初等整数论》(1982，湖北人民出版社，1988 第二版)，《线性代数》(1977，高教出版社，1980 第二版，1986 第三版)，《近世代数》(1963，上海科技出版社，1978 第二版)，《环构造》(1985，湖北人民教育出版社)。这几本书颇得读者好评，有的屡次再版，有的得到过国家教委优秀教材奖和中南五省优秀教育读物奖。其中《初等整数论》的影响已达海外，由新加坡出版社出版了英译本。

第八节 许永华在环论方面的工作

许永华1932年出生，浙江鄞县人。1955年毕业于复旦大学数学系，同年11月被公派去民主德国留学。他学了一段时间的德语后，于1957年10月进入卡尔·马克思大学学习代数，1958年转入柏林洪堡大学研究抽象代数——环论，师从格雷尔(H. Grell)。1961年许永华回国，到复旦大学数学系工作，1980年升为教授。

许永华在环论上有多方面的工作：

首先是在霍普京(Hopking)定理的推广上，关于何时阿廷环是诺特环。1939年霍普京发表文章，宣布下述一个定理："含有左(或右)恒等元(即单位元)的阿廷环必是诺特环。"许永华1975年在刚复刊不久的《数学学报》上发表文章"环的极小条件包含极大条件的充要性"，其中有这样一条定理："设 A 是阿廷环，N 是它的雅各布森根，则 A 是诺特环，当且仅当对每个 N^i 必存在一个正整数 k_i，使得 $k_iN^i \subseteq AN^i$，其中 $k_iN^i = \{k_ia \mid a \in N^i (i = 1, 2, \cdots)\}$。显然霍普京定理是这个定理的一个特例。因为若有恒等元，$k_iN^i \subseteq AN^i = N^i$ 必然成立。日本数学家对此很有兴趣，Tominaga 曾发表文章"On the theorem of Y. H. Xu"，其中对许永华的定理重新证明，并叙述为"阿廷环是诺特环当且仅当商模 N/AN 是有限的。"并将该定理称为 Xu - Tominaga 定理。关于这个课题还发表过其他文章。

环的 Morita 等价是分类的一种重要工具。通常，Morita 等价是相对于有恒等元的环。1990年许永华在除环 F 与 F 上某种无限矩阵子环之间定义了一个等价概念。在此文的基础上，1993年许永华和岑嘉评以及特纳 - 史密斯(Turner-Smith)三人合写了"Morita-like equiralence of infinite matrix subring"一文，发表在 J. Algebra 上。文中推广了 Morita 等价概念，提出了 Morita-like 等价的概念。文章发表后很受国际同行的重视，并在他们自己的文章中将 Morita-like 等价环称为 Xu-Shum-Terner-Smith 环，简称 xst 环。对于许永华等人提出的未决问题也有很多人感兴趣。

许永华还解决了自由模的自同态环的自同构问题。该问题的叙述是：如果有不同的环上的两个模的自同态环同构，那么这两个模的模结构有什么共同性？1992年许永华在《中国科学》上发表"Isomorphisme between endomorphism rings of free modules"一文，引入两个自由模的自同态环之间的"严格同构"概念。他证明"两个自由模的自同态环的同构可由此两个自由模的半线性同构所诱导，当且仅当同态环的同构必是严格同构。"

雅各布森本原环理论是许永华研究的中心。20世纪70年代末—80年代初，许永华集中研究了雅各布森的理论，共发表30余篇关于本原环方面的文章。原有的本原环代数学家的工作几乎都在有限拓扑方法和思想下进行的，这时本原环是有限可迁的。然而本原环是无限可迁的。鉴于此观点，许永华引进了一系列新概念，如$\aleph_0$可迁、$\aleph_0$基座、$\aleph_0$规范本原环以及各种类型对偶模概念，等等。在此基础上推广和扩展了雅各布森本原环理论。1985年许永华访问美国北卡罗来纳大学数学系，他的本原环工作得到同行的重视，他们一致推荐许去访问卡普兰斯基(I. Kaplanski)。后半年许永华去了芝加哥大学数学系，每周报告工作给卡普兰斯基听，还在那里交给他3篇论文。卡普兰斯基是J. Algebra等杂志的编委，他说他将把许的文章推荐给杂志社。一个月后，许永华回到国内，即收到杂志社接受稿件的通知，可见其工作还是很受重视的。

许永华还在霍普夫(Hopf)代数领域做过很多工作，如对余代数分解理论，余模分解理论和霍普夫代数对偶定理等方面都有成果。

许永华在代数上的工作还不止上述部分，限于篇幅，我们只能叙述这些。

许永华在教书育人方面也做出贡献，他共培养了研究生50余名，其中获得博士学位者有26人。

许永华共发表过80篇论文，曾获得1977年上海市重大科技成果奖，1978年全国科技大会奖，1980年国家自然科学奖，1986年国家教委优秀成果奖，1988年和1993年两次国家教委科技进步奖。

第九节　许以超的代数工作

许以超1933年出生于杭州。从初中起他的数学才能渐渐显露，对数学的兴趣也日益浓厚。1952年他以优异的成绩考入北京大学数学力学系。在段学复、聂灵沼、丁石孙等几位老师的教导下，许以超不仅打下了深厚的数学基础，而且具备了从事科研工作的能力。大学四年级时，许以超在特征

$p>0$ 的域上的李代数方面作出了两篇很优秀的学术论文，一篇是证明单李代数扩充到代数闭域时是有限个互相同构的单李代数理想的直接和，该论文发表在《北京大学学报》上。另一篇是在代数闭域上找到一类新的单李代数，在审查该文时，发现它与新到的杂志 Trans. Amer. Math. Soc. 上发表的雷(R. Ree)的博士论文结果相同，因此没有发表。但由此可见，许以超在大学时已能做出相当出色的科研成果。

许以超大学毕业后分配到中国科学院数学研究所，第二年考取了华罗庚的研究生，学习代数。1959 年他按华罗庚的要求改为多复变函数论专业的研究生。

许以超在李群和李代数其他方面做了许多工作。对于齐性凯勒(E. Kähler)流形 M，在连通可递变换群 G 为实半单李群时，他证明了 M 的最大全纯等度量变换群 $\mathrm{Aut}(M)^0=G$ 也为实半单李群。关于实黎曼流形 M，如果 $\mathrm{Aut}(M)$ 中有连通实半单李子群 G 在 M 上可递，奥尼什奇克(Onishchik)猜想 G 等于 $\mathrm{Aut}(M)$ 的单位连通分支。这个猜想在紧的情形被奥尼什奇克肯定。在非紧时，许以超在齐性凯勒流形的情形，肯定了这个猜想，且进一步给出了当 $\mathrm{Aut}(M)$ 为连通实半单李群时的齐性凯勒流形的完全分类。

在一类特殊的齐性凯勒流形，即在 C^n 中复齐性有界域的情形，有一个著名的嘉当猜想，即任何齐性有界域 D 必全纯同构于埃尔米特对称空间。这个猜想被皮阿杰茨基－夏皮罗(I. Piatetski－Shapiro)在 1959 年所否定。他引进了西格尔(C. L. Siegel)域的概念，且在 1963 年，温贝格，皮阿杰茨基－夏皮罗和金迪津(Gindikin)用最大全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D)^0$ 的李代数的技巧证明了任意齐性有界域必全纯同构于齐性西格尔域。因此齐性有界域的分类化为齐性西格尔域的分类。但是从分类及函数论研究的需要，我们应对齐性西格尔域作进一步的分类。这一工作由许以超基本完成。他利用齐性西格尔域 $D(V,F)$ 的最大全纯自同构群 $\mathrm{Aut}(D(V,F))$(为实代数李群)的三角单可递子群 G，从这个线性可解李群 G 出发，构造了一类特殊的齐性西格尔域 $D(V_N,F)$，称之为正规西格尔域。它依赖于一组适合特定矩阵方程组的矩阵集，且可以明确地表达出来。许以超证明了齐性西格尔域线性等价于正规西格尔域，且证明了两个正规西格尔域全纯同构当且仅当它们线性同构。这就将齐性西格尔域的分类化为求一个特定的矩阵组的标准形这样一个初等问题。特别在埃尔米特对称空间的标准空间中遗留了两个对应于 F_4 及 E_6 型实单李群的所谓例外典型域，长期以来没有得到它们

的明显表达式。许以超找到了具体的实现。进一步,他定出了正规西格尔域的最大全纯自同构群 Aut($D(V_N,F)$)及使一定点不动的迷向子群 Iso($D(V_N,F)$)的明确表达式。从李群齐性空间理论的角度给出了齐性有界域的具体表示 Aut($D(V_N,F)$)/Iso($D(V_N,F)$)。

法国数学家科斯居尔(J. L. Koszul)评价说:"在我看来,许以超关于凸锥和西格尔域的工作是自1975年以来对该理论有最重要和最具奠基性贡献的工作,这应当能够促成在许多方向的新的发展。虽然在正规锥概念引进后,更好地了解它的代数结构是必要的,然而正如许以超的杰出工作所表明的,一旦这一方法被掌握,它就是一个非常有效的工具。"许以超的该项工作获得中国科学院自然科学二等奖。

理论物理中的超弦理论,期望对仿射李代数给出顶点算子及其表示。卡茨和列波斯基(Lepowski)首先给出了 A_n,D_n 和 E 型的第一类仿射李代数的顶点算子表示,但未顾及 B_n,C_n,G_2,F_4 这些第一类仿射李代数。后来戈达德(Goddard)和奥利弗(Olive)等人虽然建立过一种顶点算子表示,但是他们的定义与原意不太一致。许以超给出了一般的第一类仿射李代数的顶点算子的定义,它在 A_n,D_n 和 E 型的情形和卡茨及列波斯基的定义一致,他又给出了顶点算子表示。

另外,在特征 $p>0$ 的域 F 上的李代数,许以超对卡普兰斯基代数作了进一步的推广,且在两种特殊情形证明了它们是新的非正规单李代数。

许以超在李群和李代数方面的造诣颇高,1983年他与严志达合作写了《李群及李代数》一书,1990年该书获得国家优秀教材二等奖;2000年,他在科学出版社出版了新书《李群和对称空间》。他共有6本著作,发表论文40多篇。

结　　语

我们的初衷，是写20世纪前半叶的中国代数发展简史，即写我们的师爷辈和老师辈的代数学家的工作。这些学者出生的年代在19世纪末至20世纪二三十年代，他们的教学与研究活动跨越了半个多世纪，直接的影响力延续到20世纪80年代。他们中的许多人培养了不少优秀的、从事代数及跟代数紧密相关的领域的教学与研究的人才，所以文中也顺带提到了他们的学生辈的一些相关工作，但后者不是阐述的重点，肯定会有很多遗漏。这是必须说明的。

在整个收集资料和进行编纂的过程中，我们有一点感触是深切的。从辛亥革命前后我国开始近代高等数学教育，学子们几乎是从零开始，到国外研习近代数学，回国后辛勤耕耘、教书育人，经过短短的三十几年，到20世纪三四十年代，就出现了一批其工作有国际影响的中国代数学家。其中的道理是值得去探究的。我们觉得至少有三点经验可说：一是，出国留学人员直接到国际上重要的学术中心，跟随数学大师学习与研究。二是，有一批全身心地投入教育工作、品格高尚的数学家。他们学识渊博，对教书育人精益求精，对提拔人才不拘一格。三是，有一个能自由选择和探究学术问题的环境。

有一个现象也是有启发的。我国的代数学家往往有高超的计算技巧，有自己的看家本领。徐利治在"回忆我的老师华罗庚先生——纪念华老诞辰90周年"一文中说："华先生很重视做学问需要有'看家功夫'。据他所说，他的扎实的看家功夫主要来源于三部经典著作。一是，克里斯托尔(G. Chrystal)的《代数学》。二是，兰道(E. Laudau)的《数论教程》(三大卷)。三是，特恩波尔(W. H. Turnbull)与爱德肯(A. C. Aitken)合著的《标准矩阵论》。他说《代数学》使他学会了计算技巧，《数论教程》使他获得了从事数学研究的分析功底，而《标准矩阵论》虽是一本薄薄的书，却是帮助他后来完成

'矩阵几何'和'复分析'巨大研究成果的基本工具。"(参见《数学通报》2000年第12期封二至第1页)

书编到这里,我们的心中深感惶恐,因为自知其中缺憾尚多;但愿它能作为一块铺路石,对研究中国近代数学史的同仁有所裨益。

参 考 文 献

[1] N.Bourbaki. *Elements of the History of Mathematics*. Springer, 1991.

[2] J.Dieudonne. *A Panorama of Pure Mathematics*. Academic Press, 1982.

[3] B . L . van der Waerden . *A History of Algebra , From al - Khwarizmi to Emmy Noether* . Springer-Verlag, 1985.

[4] Jean Parl Pier (ed). *Development of Mathematics*, 1900—1950. Berkhauser, 1994.

[5] 袁同礼 .A Guide to Doctoral Dissertations by Chinese Student in America 1905—1960. Washington, 1961.

[6] 袁同礼.A Guide to Doctoral Dissertations by Chinese Student in Great Britain and Northern Ireland (1916—1961). Taipei, 1963.

[7] 袁同礼 .A Guide to Doctoral Dissertations by Chinese Student in Continential Europe (1907—1962). Chinese Culture Quarterly, 1963.

[8] L.Corry. *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure*. Birkhauser,1996.

[9] 张继平主编．新世纪代数学．北京大学出版社,2002.

[10] H.Weyl. A half – century of mathematics. The American Mathematical Monthly 58:523—553 (1951).

[11] 李仲珩．三十年来的中国算学．《科学》第二十九卷第三期(1947):67—72.

[12] 张奠宙．中国近现代数学的发展．河北科学技术出版社,1999.

[13] 程民德主编．中国现代数学家传:第一卷(1994);第二卷(1995);第三卷(1998);第四卷(2000);第五卷(2002). 江苏教育出版社.

[14] 王元主编．中国科学技术专家传略·理学编·数学卷 1. 河北教育出版社,1996.

[15] 清华大学应用数学系编．杨武之先生纪念文集．清华大学出版社,1998.

[16] 江西省科学技术协会编．著名数学家曾炯博士纪念文集．江西科学技术出版社,1993.

[17] 杨乐,李忠主编．中国数学会 60 年．湖南教育出版社,1996.

[18] 任南衡,张有余．中国数学会史料．江苏教育出版社,1995.

[19] 陈省身．陈省身文选——传记、通俗演讲及其它．科学出版社,1989.

[20] 王元,杨德庄．华罗庚的数学生涯．科学出版社,2000.

[21] 清华大学校史研究室编．清华大学史料选编:第一卷,清华学校时期(1911—1928);第二卷,国立清华大学时期(1928—1937);第三卷,抗日战争时期的清华大学(1937—1946);第四卷,解放战争时期的清华大学(1946—1948). 清华大学出版社,1991—1994).

[22] 萧超然等编著．北京大学校史(1898—1949)(增订本)．北京大学出版社，1988．
[23] 西南联合大学北京校友会编．国立西南联合大学校史——一九三七至一九四六年的北大、清华、南开．北京大学出版社，1996．
[24] 《科学家传记大辞典》编写组编辑．中国现代科学家传记：1—6卷．科学出版社，1991—1994．
[25] 南开大学校长办公室编．吴大任纪念文集，南开大学出版社，1998．
[26] 马忠林等．数学教育史．广西教育出版社，2001．
[27] 柯召文集编委会编．柯召文集．四川大学出版社，2000．
[28] 宁平治等主编．杨振宁演讲集．南开大学出版社，1989．
[29] 丁石孙，张祖贵．数学与教育．湖南教育出版社，1998．
[30] 华罗庚，万哲先．典型群．上海科学技术出版社，1963．
[31] B.L.范德瓦尔登．代数学1．科学出版社，1963．
[32] 梁宗巨主编．自然科学发展大事记·数学卷．辽宁教育出版社，1994．
[33] 杜石然主编．中国古代科学家传记(上)、(下)．科学出版社，1992．1993．
[34] 张奠宙．留学生与中国现代数学的体制化(1901—1949)．博士论文，1999．
[35] 郭金海．清华大学数学系与中国现代数学．博士论文，2003．
[36] 张光远．近现代数学发展概论．重庆出版社，1991．

附 录

附录 1

论函数域上可除代数[①]

曾炯之

由 H. Weyl 推荐，于 1933 年 6 月 30 日大会宣读本文．

众所周知，复数域上仅有唯一的可除代数；定义在实数域上的可除代数仅有：实数域本身，复数域实四元数体．令 Ω 为一代数闭域，k 为 Ω 上带有一个未定元的函数域，作者在本文中确定了 k 上可除代数的类型；作为直接推论，我们还得到定义在实闭代数域上的函数域上的可除代数的类型．关于定义在其他基域上的函数域的有关问题，我们将另行讨论．本文所采取的方法都是基本的．

主要定理．设 Ω 为代数闭域，$\Omega(x)$ 表示 Ω 上关于未定元 x 的有理函数域，k 为 $\Omega(x)$ 上 n 次代数扩张．则不存在 k 上以 k 为中心的斜体，即 k 上以 k 为中心的可除代数是唯一的，且与 k 同构．

要证明主要定理，我们仅需证明如下的：

定理 I 设 k 满足主要定理中假定条件，则 k 上[②]循环代数完全可裂，即 k 上不存在指数 $r>1$ 的循环代数．

假定定理 I 中假设条件成立，并令 S 为 k 上指数 $r>1$ 的斜体．设 K 为 S 的分裂域．不失一般性，可假定 K 为 k 的伽罗瓦扩域，因为我们总能对 K 进行代数扩张，而不致于影响 K 作为 S 的分裂域所应具有的特性．令 g 为 K 在 k 上的次数．由于 $r\mid g$，若 $r>1$，则至少有一自然素数 p，能使 $p\mid g$．而当 $r=1$ 时结论自然成立．设 p^{ν} 为能够整除 g 的 p 的最高次幂．设 S 为 K

① 作者在此谨向其导师 E. 诺特致以诚挚的谢意，在她的鼓励之下，本文作者开始进行这一工作，在本文撰写过程中，她孜孜不倦的教诲和帮助，使得作者最终得以完成本文．

② "在 k 上"总表示定义在 k 上并以 k 为中心的单代数．

在 k 上的伽罗瓦群，其 Sylow p - 子群 P 之阶数为 p^r，则 P 为可解群．设 P 的合成列为

$$E \subset p_1 \subset \cdots \subset P_r = p$$

由伽罗瓦理论主要定理，我们得到相应的子域列

$$K = K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_r$$

其中 K_{i-1} 为 K_i 上循环扩域；则由定理Ⅰ可知，凡以 K_{i-1} 为分裂域的代数，在 K_i 上必可裂．由此可知，S 在 K_i 上可分裂，故 K_r 也是 S 的分裂域．另一方面，当 K_r 在 k 上的阶为 g/p^r 且 $(g/p^r, p) = 1$；根据一个上文曾引用过的经典定理，$r \mid g/p^r$，这表明，$r > 1$ 不可能成立，从而 S 在 k 上可分裂，这便证明了有关的结论．①

为了证明定理Ⅰ，我们还需如下的众所周知的定理：设 k 为一域，Z 为 k 的循环分裂扩域，则 k 上任意循环代数在 k 上完全可裂的充要条件是：k 中每个元都是 Z 中某个元的范数．②

我们还需要如下的定理，其证明也立即更一般地给出．

定理Ⅱ 假定 $\Omega(x)$ 及 k 满足主要定理中假设条件．设 S 为 k 上有限域③或斜体．对每个 $\alpha \in k$ 都可找到一个 $\xi \in S$，使得 $\alpha = N(\xi)$ 成立，其中 N 为 ξ 关于 k 的范数；且 N 通过 S 的正则表示所定义．

证明：设 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 为 k 在 $\Omega(x)$ 上一组整基；$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m$ 为 S 的一组 k - 基，且 $\Omega_i\Omega_k$ 为 Ω_v 的系数为整式的线性型．不失一般性，设 α 为 k 上的整元；否则我们总可以在 $\Omega(x)$ 中找到一个固定的多项式 r^m 使得 $r^m\alpha = \beta$ 为整式．由于 $r^m = N(r)$，因此只要对整元素定理成立，那么对分式定理也成立．

设 $\alpha = \sum_{v=1}^{n} \alpha_v \omega_v$，其中 α_v 为 $\Omega(x)$ 中有理整式．我们需找到 k 中元素 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ 使得

$$\alpha = N\left(\sum_{v=1}^{m} \xi_v \Omega_v\right) \tag{1}$$

N 为定义在 k 上的关于 ξ_v 的 m 次齐次型．若作替换

① 这一定理证明的思路是依照布饶尔(Brauer)，哈赛(Hasse)及诺特关于可裂代数之定理的证明而进行的．J.f.Math167(1932)，参阅 Hasse 的表示论，Math.Ann107(1933)．

② 见 E.诺特的报告，Intern.Math.Konress，Zurich1932 或 Hasse 上述引文，见脚注 3．

③ 译者注：这时有限域指有限扩域．

$$\xi_v = \sum_{\mu=1}^{n} X_{\mu v}\omega_\mu$$

其中为 $X_{\mu v}$ 为属于 $\Omega(x)$ 的待定函数，则 N 转化为关于 $X_{\mu v}$ 的 m 次齐次型，且其诸系数 γ 为 k 中整元.

$$\gamma = \sum_{v=1}^{n} c_v\omega_v,\ c_v \text{ 为 } \Omega(x) \text{中多项式},$$

整理后我们得

$$N = \sum_{v=1}^{n} N_v\omega_v$$

N_v 为以 $\Omega[x]$ 中元素为系数的关于 $X_{\mu v}$ 的 m 次齐次型．通过简单计算可知，多项式(1)的可解性便等价于下列函数方程组的可解性

$$N_v - \alpha_v X_0{}^m = 0 \tag{2}$$

这里 X_0 表示诸 $X_{\mu v}$ 之公分母．$X_{\mu v}$ 中的分子我们仍然记作 $X_{\mu v}$．设 t_0 为 α_v，c_v 之最高次数．令 t 为 $X_{\mu v}$ 之次数，上文中刚刚提到过的 X_0 的准确值待确定．在方程(2)中，我们比较 x 诸方幂的系数，得到一个以 $X_{\mu v}$ 为系数、X_0 为未知元的 m 次齐次方程组，其中方程个数 $\leqslant n(t_0 + mt + 1)$．通过适当选择 t，必然可使 $n(t_0 + mt + 1) < (1 + mn)(t + 1) =$ 未知元数．依据消去法的一个定理①，可知方程(2)总有非平凡解．此外还必然成立 $X_0 \neq 0$；因为 S 为域或斜体，其中没有零因子，从而其中非 0 元(由于(2)的解为非平凡解)的范数必不为 0. 这就证明了定理Ⅱ.②

设 Ω 为一实闭域；若 k 包含满足条件 $i^2 = -1$ 的元素 i，则 k 也包含代数闭域 $\Omega(i)$，这样我们就得不到任何新结果．若 k 不包含元素 i，则 k 上任意代数 S 在 $k(i)$ 上是可裂的；从而 $k(i)$ 是 S 的分裂域．由以上讨论可知，k 上的可除代数仅为 k 本身，指数为 2 的代数及“广义四元数体”.③

通过上述证明方法，人们很自然地会考虑，对于多个变元的函数域，上述事实是否仍成立．答案是否定的．我们有下列定理：

定理 设 Ω 为任意域，K 为 Ω 上关于变元 x,y 的全体有理函数域(这里 x,y 为 Ω 上互相无关的超越元)．则在 K 上总有有限斜体．若令 $K = \Omega$

---

① 关于消去法理论，参阅 Van d. waerden, Moderne Algebra Ⅱ.

② E. 诺特曾告知本文作者，由本文定理Ⅱ，可以给出主要定理的一个更加基本的证明，即：设 S 为 k 上且以 k 为中心的斜体，则易知正则范数缩减范数的 r 次幂，当 $r>1$ 时，若每个元都是 r 次幂，则 k 在 Ω 上的次数不可能为有限.

③ 本段的基本思想源自 W. 维希曼(W. Wichmann).

$(x_1, x_2, ..., x_n)$，其中 x_i 为未定元，则这一定理同样成立．

证明：为证明定理，我们仅须构造一个例子即可．我们断言，$(y, K(\sqrt{x}), S)$ ①便是 K 上一个有限斜体．利用前面曾利用过的一个引理，我们仅须证明，函数方程

$$x\Delta_0^2 + y\Delta_1^2 = \Delta_2^2$$

在 $\Omega[x, y]$ 中不可解；这里 $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ 均为待定多项式．我们将 $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ 写成如下的齐次式

$$\Delta_0 = \sum_{m=0}^{t}\phi_m(x, y), \Delta_1 = \sum_{m=0}^{t}\Psi_m(x, y), \Delta_2 = \sum_{m=0}^{t}\chi_m(x, y)$$

其中 $\varphi_m, \Psi_m, \chi_m$ 均为 x, y 的 m 次齐次式．则方程右端为偶次而左端为奇次，从而必有

$$x\varphi_t^2(x, y) + y\psi_t^2(x, y) = 0$$

由归纳法立知所给函数方程无解．

编者注：此文原题为 Divisions algebren über Funktionenkörpern，刊于 Nachr. Ges. Wiss. Göttingen，1933：335—339．由黄建华教授译成中文．中译文原载于《著名数学家曾炯博士纪念文集》．

① 要了解这一符号的意义，请参阅 Hasse 的表示论，Math Ann107(1933)．

附录 2

论交换域的拟代数闭性的层次理论①

曾炯之

E·阿廷(E·Artin)曾经指出②,代数理论可以看作是域上丢番图方程理论．特别是域 K 上可除代数的非存在性取决于 K 上某些多元方程组的可解性．依阿廷之定义,我们把一个域 K 叫做拟代数闭域,若 K 中任一齐次方程,只要其元数大于其次数,便在 K 中有非平凡解．按照这一定义,代数闭域上的一元代数函数域与伽罗瓦域都是拟代数闭的．

本文中我们将继续运用上述方法并考察未知数个数与次数间的相互联系;为此,在 §1 中我们引入了交换域的层这一概念．根据消去法定理,0 层域便是代数闭域．在这一结论的证明过程中,消去法理论和多项式理想论为我们提供了重要方法③. §2 中给出了这一证明,在 §3 中,我们讨论了关于层 1 的情况．§4 中,我们证明了具有各种整数层的域之存在性．§5 中,两个等价性得到了证明．在 §6 中,我们证明了,§5 中所证明的定理也适用于满足某些假定条件、具有任意层的域．

§1

设 α 为一实数,我们考察域 K 上方程组之集合 M_α,M_α 中任一方程组

---

① 谨以本文纪念 E·诺特(Emmy Noether)教授．本文完成于 1934 年,时值作者为中华文化教育基金会研究员,在汉堡进修．在此,作者对阿廷先生的诚挚情谊和勉励表示由衷的感谢．

② 曾炯之,函数域上的可除代数,格丁根文摘(1933). 函数域上的代数,博士学位论文,格丁根(1934).(Chevalley, De'monstration d'une hypoth'ese de M. Artin, Abh·(编者注:应加 Math. Sem·Hamburg), Band 11,(1935)

③ Van der Waerde, Modernen Algebra II (1930)

满足下列条件:

1)每个方程有非平凡解;并且

2)方程组中未知元个数 $>\sum_{i=1}^{m} g_i^{\alpha}$;

其中 g_i 为所给方程组第 i 个方程之次数,m 为所给方程组中方程之个数.若 M_α 中每个方程组都在域 K 上可解,我们便说 M_α(在域 K 上)可解.显然地,若 $\alpha<\beta$,则只要 M_α 可解,M_β 便可解.我们把 α 这样一个表现了所给域之特性的数称为该域的拟代数闭性层或简称为层.若所给域为形式实的,则其层数便不可能为有限,因为这时方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2=0$,对任意 n 仅有平凡解.一个域的层不可能通过代数扩张而扩大.下列定理成立:

定理 1 若域 K 之层数为 α,且 $K(\theta)$ 为 K 上有限代数扩张,则 $K(\theta)$ 的层 $\leqslant \alpha$.

注:有的域,通过其代数扩张其层数减小,例如实数域.还有些域,其层数经过代数扩张不变,例如代数闭域上的一元代数函数域,请参阅 § 2.

证明:设 $(K(\theta)/K)=m$,且设 $\omega_1,\cdots,\omega_m$ 为 $K(\theta)$ 的一组 K-基.给定 $K(\theta)$ 上一个方程组 $f_i(y_i,\cdots,y_n)=0$,并假定这一方程组满足上文中的假设条件 1)和 2).令 $y_i=\sum_{i=1}^{m} y_{ji}\omega_i\,(j=1,\cdots,n)$,由于域的基的无关性,我们便得到域 K 上一个方程组,它仍满足条件 1)和 2),从而新方程组在 K 中有解,故原方程组在 $K(\theta)$ 中也有解.这就证明了定理 1.

§ 2

由于在任何域中,方程 $x^2=0$ 都只可能有平凡解,则任何域的层数都不可能为负数.若我们仅限于考察齐次方程组,则由消去法理论可知,任意代数闭域之层数必为 0,因为按消去法理论,下列定理成立:

设 F_i 为某一代数闭域上的型,且 F_i 之个数小于未定元之个数,则方程组 $F_i=0$ 总有公共非零解.

但我们希望取消关于方程的齐次性之限制,为此我们需要如下的关于多项式理想论的定理:

设 Ω 为一代数闭域,$O=\Omega[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 为 Ω 上关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的多项式环,设 $(f_1,f_2,\cdots,f_r)$ 为异于单位理想 O 且由 r 基元素所生成的理想,

且其维数 $d \leqslant n-r$，则它是纯的，且其维数恰为 $n-r$.

由这一定理可知，一个含 r 个方程的 $n(>r)$ 元方程组，或者在 Ω 中无解，或有无穷多个解. 故只要这样的方程组有平凡解，则必有非平凡解，故 Ω 之层数 $\leqslant 0$. 反之，若域 K 之层数为 0，则所有具有下列形状的方程

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n = 0$$

在 K 中有非平凡解，即任意方程 $a_0x^n + \ldots + a_n = 0$ 都在 K 中可解. 由以上讨论即得

定理 2 代数闭域之层数为0，反之亦然.

§3

每个非代数闭域，都至少有一个真有限代数扩张，基域上一般元素的范数叫做正则型，它是一个 $n(>1)$ 元 n 次的齐次多项式，正则型在 K 中仅有平凡解. 故任意非代数闭域之层数不可能小于 1，我们证明

定理 3 *存在层数为1的域.*

证明：为证明定理 3，我们仅需构造一个例子即可，设 Ω 为一代数闭域，$\Omega(x)$ 为 Ω 上一元有理函数域，这里 x 为 Ω 上一个超越元. 我们还假定 $\Omega(x,y)$ 为 $\Omega(x)$ 上一个有限代数扩域，则可证明 $\Omega(x,y)$ 之层数为 1.

由定理 1 可知，要证明上述结论，仅须就有理情况证明即可.

设 $f_i(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为 $\Omega(x)$ 上一个方程组. 设 f_i 的次数为 g_i，且 $n > \sum_{i=1}^{m} g_i$，此外还假定，对任意 i 都有 $f_i(0,0,\cdots,0) = 0$. 我们还可以进一步假定一切 f 中的系数都是 x 的多项式，在以上方程中，我们将所有的 X_i 都代以 x 的待定多项式

$$X_i = u_{i0} + u_{i1}x + \ldots + u_{it}x^t$$

其中 u_{ij} 为新未知元，t 为待确定之整数. 设 t_0 为所有方程之系数中所出现的 x 的最高幂次数. 若我们把通过代换所得方程中各个 x 的不同幂的系数加以比较，则由原方程组中一个方程可以得到 Ω 上一个以 $u_{i0}, u_{i1}, \ldots, u_{it}$ 为未知元的方程组，这一方程组中方程个数至多为 $tg_i + t_0 + 1$ 个，且当 $u_{i1} = 0$ 时诸方程左端全为 0. 这样，我们得到一个 $(t+1)m$ 元的方程组，其方程个数至多为 $\sum_{i=1}^{m}(tg_i + t_0 + 1)$ 个. 根据我们在 §2 中所引用的关于多项

式理想论的定理可知,新方程组在 Ω 中有解,故原方程组在 $\Omega(x)$中有解,从而可知 $\Omega(x)$的层数 $\leqslant 1$. 另一方面,因为 x 为 Ω 上超越元,故 $\Omega(x)$的层数也不会小于 1,这样就证明了我们的结论 .

根据谢瓦莱(Chevalley)对于阿廷猜想所做的证明,我们知道,还有一类域也具有层 1,那便是伽罗瓦域 . 广义的谢瓦莱定理①为:

设 k 为伽罗瓦域,g_i 为 k 上方程 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$之次数且 $n>\sum_{i=1}^{m} g_i$,则方程组 $f_i=0$ 在 k 中互异的公共解的个数可被域 k 的特征 p 整除,即或为 0,或为 $2p,3p,\cdots$.

由此可知,伽罗瓦域的层数为 1.

由于一个域上指数为 n 的可除代数一般元素的缩减范数是一个 n^2 变元的 n 次型,故层数小于 2 的域 k 上没有真可除代数 . 依以上方法我们可以证明维德伯恩(Wedderburn)定理与曾(炯之)——定理 . 但我们还不知道,是否所有泛分裂域②都具有小于 2 的层数 .

§ 4

在 § 3 中我们看到,若在一个域上有指数 >1 的可除代数,则这一域之层数必然大于或等于 2,现在我们证明层数为任意整数的域的存在性 . 设 α 为一实数 . 域 k 上具有层数 α 的正则型是 k 上一个 n 元 n 次型,且这一型为 0 当且仅当其诸变元均等于 0. 为了排除平凡的情形,则下面凡涉及正则型,便假定其次数 $n>1$. 以下我们证明

定理 4 设 $K(t)$为 K 上单超越扩张,且 K 上有层数为 α 的正则型,则在 $K(t)$上有层数为 $\alpha+1$ 的正则型 .

证明:设 $N(x_1,x_2,\cdots,x_{n^\alpha})$为 K 上 n 次正则型,我们构造 $K(t)$上 n 次型

$N^*=N(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n^\alpha})+N(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n^\alpha})t+\cdots+N(x_{n-1,1},x_{n-1,2},\cdots,x_{n-1,n^\alpha})t^{n-1}$,其中所有的 x_{ij}为新变元,其总数为 $n^{\alpha+1}$个 . 我们断言,N^* 为 $K(t)$上 n 次且层数为 $\alpha+1$ 的正则型 . 事实上,若 x_{ij}不全为 0

① E, Warning, Bemerkung zur vorstehenden Arbeit von Herrn Chevalley, Abh. Hamburg, 11.

② 所谓泛分裂域是一个域,在其上不存在指数 $n>1$ 的可除代数;例如,代数闭域,伽罗瓦域,代数闭域上的单变元代数函数域及维特(Witt)域,(参阅 E·Witt, Zerlegung reeler algebraischer Funktionen in Quadrate Schiefdorper reellem Fundtionenkorper, Crelle, 171)

时，$N^*=0$，则必然成立

$$N(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n^a})\equiv 0(\bmod\ t)$$

从而得

$$x_{0j}\equiv 0(\bmod t)(j=1,2,\cdots,n^a)$$

故有

$$N(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n^a})=t^nN(\bar{x}_{01},\bar{x}_{02},\cdots,\bar{x}_{0n^a})$$

这表明，t 整除 N. 同理，又有 $N(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1n^a})\equiv 0(\bmod\ t)$，故 $x_{ij}\equiv 0(\bmod\ t)$，从而 t^2 整除 N，通过完全同上的过程，我们可以证明，t 的任意方幂都是每个 x_{ij} 的因子，这就迫使 $x_{ij}=0$. 这样我们就证明了定理.

现在我们以任意层数为 1 的域作为出发点，在这样的域上当然有层为 1 的正则型. 由定理 4 可知，在 K 的超越扩张 $K(x)$ 上，存在层为 2 的正则型. 我们逐个在诸域 $K_{i-1}=K(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1})$ 上添加超越元 x_i，则在 K_i 上存在层数为 i 的正则型，故域 K_i 的层数大于或等于 i. 我们将通过以下定理证明，实际上 K_i 的层数不可能大于 i.

定理 5 若 K 具有层 α，$K(x)$ 为 K 的单超越扩张，则 $K(x)$ 之层数 $\leqslant\alpha+1$.

若我们已完成定理 5 之证明，则还有

定理 6 对任意自然数 α，都存在层数为 α 的域.

定理 5 之证明：设 $K(x)$ 为 K 上单超越扩张，设 $F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 为 $K(x)$ 上 m 个方程的方程组，且 $F_i(0,0,\cdots,0)=0$，设 Fi 之次数为 G_i 且以下不等式成立：$n>\sum G_i^{\alpha+1}$. 不失一般性，我们可假定所有方程的系数都是 K 上关于 x 的多项式，设在这些多项式中 x 的最高方幂为 x^{t_0}. 我们将依上文的做法以如下的多项式代替 x_i.

$$x_i=\sum_{j=0}^{t}y_{ij}x^j(i=1,2\cdots,n)$$

此处 t 为一待定整数. 从而我们得到 $F_i=f_{i0}(y_{10},\cdots,y_{ns})+f_{il}(y_{10},y_{11},\cdots,y_{ns})x+\cdots+f_{is}(y_{10},\cdots,y_{ns})x^s$，其中 $s\leqslant t_0+tG$. 比较 F_i 中所有 x^i 之系数，我们至多可以得到 K 上 t_0+tG+1 个方程 $f_{ij}(y_{11},\cdots,y_{ns})=0$，其次数为 G_i，并带有 $(t+1)n$ 个未知元 y_{ij}，而系数 K 中，当诸 y_{ij} 均为 0 时，多项式 f_{ij} 变为 0. 令 t 充分大，可使下列不等式成立：

$$n(t+1)>\sum_{i=1}^{m}(t_0+tG_i+1)G_i^{\alpha}$$

由定理之假定，方程 $f_{ij}=0$ 在 K 中必有非平凡解，从而 $F_i=0$ 也在 $K(x)$ 中有非平凡解，这就证明了定理．

§5

阿廷首先给出了如下的拟代数闭域的定义：

域 k 说是拟代数闭的，若 k 上任一 $<n$ 次的齐次方程 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$ 在 k 中有非平凡解．

本文作者历来从事方程组的研究工作，我们注意到在有关的证明过程中，方程组的齐次性所起的作用仅仅是：方程 $F=0$ 至少有一解．特别值得注意的是下列事实：即方程的非平凡解的存在性与方程组的非平凡解的存在性间有着深刻关联．依照阿廷的方法，我们证明如下的定理 7，这一定理通常被称为"阿廷等价定理"．然后，在下一节中我们设法把这一性质推广到具有较高层数的域上．尽管目前距整个问题的彻底解决还有一段漫长的距离，但仅以目前所得到的定理而言，已颇引人注意了．

定理 7　假定对于 k 上任意方程 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$，只要 f 之次数 $<n$，且 $f(0,\cdots,0)=0$，f 在 k 中便有非平凡解，则 k 上任意由 m 个同为 g 次的方程所组成方程组 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，只要条件 $n>mg$ 及 $f_i(0,\cdots,0)=0$ 成立，那么该方程组在 k 中便有非平凡公共解．

证明：对于代数闭域，定理 7 中结论显然成立．设 k 非代数闭的，则在 k 上有层为 1 的 n 次正则型，此处 $n>1$．设 $N(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 为这样一个正则型．我们在 N 中作代换 $y_i=N(y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{in})$；便得到一个 n^2 次关于 y_{ij} 的型．给定方程组 $f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$，并假定这一方程组满足定理 7 中之假定条件．设 $N(y_1,\cdots,y_s)$ 为 k 上 s 次，这里 s 的准确值待定．我们引入 ξ，把未知元 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表成 n 维向量，并且以带有不同指标的向量表示不同的未知元组，通过下表我们将诸 y_i 的表达式代入 $N(y_1,y_2,\cdots,y_s)$：

$y_1=f_1(\xi),y_2=f_2(\xi),\cdots,y_m=f_m(\xi)$

$y_{m+1}=f_1(\xi^{(1)}),y_{m+2}=f_2(\xi^{(1)}),\cdots,y_{2m}=f_m(\xi^{(1)})$；

$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$

$y_{(l-1)m+1}=f_1(\xi^{(l-1)m}),\ y_{(l-1)m+2}=f_2(\xi^{(l-1)m}),\ \cdots,\ y_{lm}=$

$f_m(\xi^{(l-1)m})$;

$y_{lm+1}=0$

…

$y_s=0$

这里 l 为不大于 s/m 的最大整数，也记做 $[s/m]$. 则

$$N^*=N(f_1(\xi),\cdots,f(\xi^{(l-1)m}),0,\cdots,0)=0$$

为一 sg 次 ln 元方程．这时，只要我们像以往一样，选择适当大小的 s，便有

$ln>sg$

故方程 $N^*=0$ 在 K 中有非平凡解．例如，只要 $\xi^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)$ 不全为 0，则 $x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*$ 为 $f_1(x_1,\cdots,x_n)=0,\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的一组非平凡解，这样就证明了主要定理．

若方程组中诸方程之次数 g_i 不完全相等，则我们必须给出一个假定．设 p 为一素数，我们说一个域 K 是 p – 代数闭的，若 K 上每个 p 次方程在 K 上都是可约的．那么成立

定理 8 假定对任意素数 p，K 都不是 p – 代数闭的，且依阿廷之定义，K 为拟代数闭的，则域 K 具有层数 1.

证明：由假定，对任意 p，有一 p – 次正则型，则通过综合考察诸不同素数次正则型，我们可以得到任意整数次的正则型．设 $f_i(x_1,\cdots,x_n)=0(i=1,\cdots,m)$ 为 K 上一方程组(记为 (f))且 $f_i(0,\cdots,0)=0$. 设 f_i 之次数为 g_i 且 $n>\sum_{i=1}^{m}g_i$. 令

$g=g_1g_2\cdots g_m$

$G_i=g/g_i$

设 N_i 为 K 上 G_i 次正则型．如上文我们仍以 ξ 表示未知元 $x_1,\cdots,x_n$. 且在满足条件 $\xi_j^{(i)}=\xi_i^{(j)}$ 之前提下，以带有不同指标的 ξ 表示不同的未知元系 $(x_1,\cdots,x_n)$. 现在我们把带有不同未定元系的多项式 f_i 代入 N_i 之中，便得到 g 次方程组

$$N(f_i(\xi_j^{(1)}),f_i(\xi_j^{(2)}),\cdots,f_i(\xi_j^{(G_i)}))=0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,g_i) \tag{N}$$

其中未知元数为 ng，方程个数为 $\sum_{i=1}^{m}g_i$. 则由假定有 $gn>g\sum_{i=1}^{m}g_i$；从而，根据定理 7，(N) 有非平凡解，同样 (f) 也有平凡解．这就证明了定理 8.

§6

本节我们证明具有任意层数的域的两个相类似的定理．为简单起见，我们仅就整数情况加以讨论．

定理 9 令 α 为一整数．设域 K 上有一 α 层的正则型．假定，对于任意方程 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$，只要其元数 $>(f$ 的次数$)^\alpha$，那么 f 除平凡解外还有非平凡解，则下列结论成立：设 $f_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ 为包含 m 个方程的方程组，且 $n>mg^\alpha$，这里 g 为 f_i 之次数，又 $f_i(0,0,\cdots,0)=0$，则这一方程组有非平凡解．

为证明定理 9，我们首先构造次数足够高的 α 层正则型．再通过简单计算，我们可以轻易地证明定理之正确性．

借助于定理 9，我们可以证明以下定理 10.

定理 10 设 α 为一整数，并假定对每个正整数 m，在 K 上都有 α 层 m 次正则型，则由如下方程

$$f(x_1,\cdots,x_n)=0,\text{其中 } n>(f\text{ 的次数})^\alpha$$

及

$$f(0,0,\cdots,0)=0$$

的可解性，可知 K 之层数为 α.

证明：设 $f_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ 为 K 上一个包含 m 个方程的方程组，且 $f_i(0,\cdots,0)=0(i=1,\cdots,m)$．设 f_i 之次数为 g_i，且 $n>\sum_{i=1}^{m}g_i^\alpha$．我们如下证明这一方程组的非平凡解之存在性：首先构造 K 上 α 层 G_i 次正则型 $N_i=N_i(y_1,\cdots,y_{G_1^\alpha})$，其中 $G_i=g/g_i$，$g=g_1g_2\cdots g_m$．依定理 7 的证明方法，我们在 N_i 中以 $f_i(\xi)$ 代换 y_i，则得一个由 $\sum_{i=1}^{m}g_i^\alpha$ 个 g 次方程所构成的方程组．这一方程组中，未知数个数为 ng^α．显然，$ng^\alpha>\sum(g_i^\alpha)g^\alpha$．由定理 9，新方程组有非平凡解，从而原方程组也有非平凡解，这就证明了定理 10.

对于非整数 α，只要我们对于数 α 和次数 gi 间的关系做出适当假定，便可以证明类似的定理．但迄今为止，我们对任何具有非整数层的域还一无所知，对此，本文作者希望以后有机会再加以考虑．

编者注：此文原题为 Zur Stufentheorie der quasi-algebraisch Abgeschlossenheit Kommutativer Körper，刊于 Jour. Chinese Math. Soc.（中国数学会学报），1936，1：81—92. 由黄建华教授译成中文．中译文原载于《著名数学家曾炯博士纪念文集》．

附录3

论代数流形的相伴形式和代数系统

周炜良,B.L.van der Waerden,莱比锡

把几何对象用坐标表示是头等重要的,一旦对某种特殊类型的对象 G 做到了这件事,那么它便使得谈及一个代数流形或对象 G 的代数系统有了意义,从而对它也可以应用代数流形的整套理论(分解为不可约分支,维数观念,不可约流形的一般元的观念).赋予对象 G 的集合以代数结构(最终是在某种紧化之后),从而可以用以坐标表示的方程来刻划 G,这是件值得做的工作.

射影空间 S_n 中的点可用 $n+1$ 个齐次坐标描述,子空间 S_r 用它们的 Plücker 坐标描述,而 g 次超曲面则用它们方程的系数来描述.在所有这些情形中,上面所描述的条件也都为这些对象所满足.

我们需要得到一个用坐标来描述在 S_n 中具固定次数 g 的 r 维流形 M 的方法:我们将叙述 $r+1$ 个超平面 $u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)}$ 在 M 中有一个公共点的条件.这个条件是个单个的方程 $F(u)=0$,它对每个变量 $u^{(0)},\cdots,u^{(r)}$ 的次数都为 g,它是若干因子的乘积,这些因子的数目与 M 的不可约分支的数目相同.称 $F(u)$ 为此流形的相伴形式.它也包括了 M 的某些不可约分支或相应地,$F(u)$ 的某些因子被计以重数的情形.现在可以把相伴形式 $F(u)$ 的系数取作 M 的坐标了.

容易看出流形 M 被其相伴形式即其坐标唯一确定,但不容易看出的是*所有次数 g 维数 r 的 M 的集合在此坐标下是一个代数流形*.由第一作者得到的它的证明出现在第一节中.第二节中讨论了流形 M 的代数系统的观念,经与代数对应理论有关.

1. 流形 M 的相伴形式

设立 n 维射影空间 S_n 中一个 r 维不可约代数流形 M 由 $K[x]=K[x_0, x_1,\cdots,x_n]$ 中的一些形式 f_u 定义. 一个由 r 个线性形式

$$l_i=\sum_{j=0}^{n}u_j^{(i)}x_j(i=1,\cdots,r)$$

定义的一个一般的线性子空间 S_{n-r} 与 M 交出一个零维流形, 它相对于 $K(u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 为不可约①. 这些点被记为

$$P^{(i)}=(P_0^{(i)},P_1^{(i)},\cdots P_n^{(i)})(i=1,\cdots,g)$$

如果我们定义 g 个线性形式

$$L_i(u^{(0)})=\sum_{j=0}^{n}P_j^{(i)}u_j^{(0)}$$

其中 $u_j^{(0)}$ 为不定元, 则它们的积

$$G(u^{(0)})=\prod_{i=1}^{g}L_i(u^{(0)})$$

是 $u^{(0)}$ 的一个形式, 它相对于 $K(u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 与其共轭重合. 因此 $G(u^{(0)})$ 的幂是一个系数在 $K(u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 中的形式. 用 $K[u^{(1)},\cdots,u^{(r)}]$ 中一个恰当的多项式去乘它, 我们得到系数在 $K[u^{(1)},\cdots,u^{(r)}]$ 中的一个 $u^{(0)}$ 的形式, 它只能被 $L_i(u^{(0)})$ 的乘幂除尽. 因为每两个这种形式具有一个也是这种形式的公共因子, 因而存在一个具这些性质的形式 $F(u^{(0)})$, 它在差一个 K 中因子下唯一确定. 并且作为 $K[u^{(1)},\cdots,u^{(r)}]$ 中的多项式是不可约的. 这个形式被称为 M 的*相伴形式*, 其次数称作 M 的次数②.

清楚的是, 两个不同的不可约流形不可能有同一个相伴形式, 因为在分解相伴形式时我们得到不可约流形的一般点, 而两个不可约流形如具有公共的一般点必定相同.

一个不可约流形的相伴形式 $F(u^{(0)})=F(u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 由定义是对 $u^{(0)}$ 为齐次, 同样也对 $u^{(i)}$ 为齐次并有同一次数, 其理由是 $f_u, l_1\cdots, l_r$ 和附加的形式 $l_0=\sum_{j=0}^{n}u_j^0x_j$ 的 u - 结式也是一个系数在 $K[u^{(1)},\cdots,u^{(r)}]$ 中的

① 其证明是 B. L. v. d. Waerden, ZAG. V, Math. Annalen 110, p. 140.

② 不同 $P^{(i)}$ 点的个数已被称作了 M 的次数, 但实际它应被叫作简约次数. 如果 K 是完全域, 则 $F(u^{(0)})=G(u^{(0)})$, 而次数等于简约次数.

$u^{(0)}$的形式，它只能被 $L_i(u^{(0)})$ 的乘幂除尽. 这个 u - 结式 $D(u)$ 是 $f_u, l_0, l_1, \cdots, l_r$ 的一系列结式的最大公因子. 因此，如果交换两个变量则 D 只改变了 K 中的一个因子. 由于 F 为不可约，D 必是 F 的一个幂，它确定到 $K[u^{(1)}, \cdots, u^{(r)}]$ 中一个因子. 但这个因子只能是 K 的一个元素：如果 $D(u)$ 有一个依赖于 $u^{(1)}$ 但不依赖于 $u^{(0)}$ 因子，则由于对称性，它也有一个依赖于 $u^{(0)}$ 但不依赖于 $u^{(1)}$ 的因子. 但后一个因子应是 F 的幂，因此 F 就会与 $u^{(1)}$ 无关并也依赖 $u^{(2)}, \cdots, u^{(r)}$，这是荒谬的. 故 $D(u)$ 是 F 的一个幂. 特别，F 是齐次的并对所有 $u^{(i)}$ 有同一次数.

一个任意的纯 r 维代数流形是有限多个 r 维不可约流形 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的并，其中任一 M_i 可带重数 ni. 用 $F_i(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(r)})$ 记 M_i 的相伴形式，其次数为 g_i. 于是我们称

$$F(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(r)}) = \prod_{i=1}^{h} F_i(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(r)})^{n_i}$$

为 M 的相伴形式，次数为 $g = \sum n_i g_i$. 像不可约流形的情形一样，很清楚，一个流形被它的相伴形式唯一决定. 这个形式对所有 $u^{(i)}$ 为齐次并具同一次数. 后面我们称对所有 $u^{(i)}$ 为齐次并且同一次数 g 的形式为 $K[u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(r)}]$ 中的 g 次形式.

现在的问题是，使一个 $K[u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(r)}]$ 中的 g 次形式为一个 r 维流形的相伴形式必须满足的条件是什么. 下面的定理回答了这个问题.

定理 1 $K(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(r)})$ 中的 g 次形式 $F(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(r)})$ 为一 r 维代数流形的相伴形式当且仅当下列条件得到满足：

1. $F(u^{(0)}) = F(u^{(0)}, u^{(1)}, \cdots, u^{(r)})$ 作为 $u^{(0)}$ 的形式是在 $K(u^{(1)}, \cdots, u^{(r)})$ 的一个适当扩域中线性因子的积：
$$F(u^{(0)}) = \prod_{i=1}^{g} L_i(u^{(0)}) = \prod_{i=1}^{g} \left(\sum_{j=0}^{n} P_j^{(i)} u_j^{(0)}\right)$$
2. $L_i(u^{(k)}) = 0$ 对所有 $i = 1, 2, \cdots, g, k = 1, \cdots, r$.
3. 如果 $v_j^{(1)}, \cdots, v_j^{(r)} (j = 0, 1, \cdots, n)$ 为 $K(p^{(i)})$ 的任一扩域中的元，而且如果 $L_i(v^{(k)}) = 0$，对 $k = 1, \cdots, r$（对一固定的 i），则 $F(u^{(0)}, v^{(1)}, \cdots, v^{(r)})$ 作为 $u^{(0)}$ 的形式被 $L_i(u^{(0)})$ 除尽.

证明：我们只局限于形式 F 为不可约的情形，因为一般情形可用分解 F 为不可约因子的积而化成此种情形. 为此我们必须指出，如果形式 F 满足条件 1,2,3，则它的因子也满足，反之亦然. 对条件 1 和 2，这点是清楚的.

对条件 3,我们留意下面的论证.设 F_1 为 F 的一个不可约因子,

$$F_1=\prod_{i=1}^{g}L_i(u^{(0)})$$

设 F 满足条件 3;我们将证明 F_1 也满足条件.于是,设 $V^{(k)}$ 为线性方程组

$$L^i=(v^{(k)})=0(k=1,\cdots,r) \tag{1}$$

对固定的 $i(1\leqslant i\leqslant g)$ 的解.由线性方程理论我们知道这个方程组的所有解可由在通解中给定某些参数而得到;这个通解包含了未定的线性参数.由 2,方程组的一个特解是 $v^{(k)}=u^{(k)}$.现在我们必须证明 $F_1(u^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 可以被 $L_i(u^{(0)})$ 除尽,其中 $v^{(k)}$ 为前面所提线性方程组的通解.由假定,$F(u^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 被 $L_i(u^{(0)})$ 除尽;因此至少 F 有一个不可约因子被 $L_i(u^{(0)})$ 除尽;设其为 F_2.当通解 $v^{(k)}$ 中的参数被选取,使得 $v^{(k)}$ 特解为 $u^{(k)}$ 时,仍然保持了这种可除性.因此 $F_2(u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 和 $F_1(u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 有公因子 $L_i(u^{(0)})$.由于 F_1 和 F_2 都不可约,这表明 $F_1=F_2$(差一个常数因子).故 $F_1(u^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 被 $L_i(u^{(0)})$ 除尽,从而证明了 F_1 满足条件 3.

现在设 F 不可约,于是 g 个点 $p^{(1)},\cdots,p^{(g)}$ 相对于 $K(u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 为相互共轭,因此存在一个不可约流形 M,它包含了所有 $p^{(i)}$,并将其作为一般点.由 2,一个具方程

$$\sum_{j=0}^{n}u_j^{(k)}x_j=0(k=1,\cdots,r)$$

的一个一般的 $(n-r)$ 维子空间 S_{n-r} 与流形 M 至少交于 g 个一般点.条件 3 说明 S_{n-r} 不包含 M 的其他一般点:设 S_{n-r} 含有 M 的一般点 $q=(q_0,q_1,\cdots,q_n)$.由一般点的代数等价性可知,存在由 $K(q)$ 到 $K(p^{(i)})$ 的同构.此同构可扩张为 $K(q,u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 到 $K(p^{(i)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 的同构.而方程式 $\sum u_j^{(k)}q_j=0$ 说明点 q 在 S_{n-r} 中,并且此方程在同构下保持不变;故对所有 $k=1,2,\cdots,r$,有

$$\sum_{j=0}^{n}v_j^{(k)}P_j^{(i)}=0 \text{ 或 } L_i(v^{(k)})=0$$

由 3,这表明 $F(u^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 被 $L_i(u^{(0)})$ 除尽.将上面的同构反方向应用,我们便得出 $F(u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 被 $\sum u_j^{(0)}q_j$ 除尽,亦即,由于 1,得知 q 是 $p^{(i)}$ 中的一个.

由于一个一般的 $(n-r)$ 维线性子空间交 M 于有限个一般点,M 必为 r

维.现在已清楚 F 是 M 的相伴形式了.由2得知,g 个点 $p^{(1)},\cdots,p^{(g)}$ 为 M 与由 $u^{(1)},\cdots,u^{(r)}$ 定义的一般的 S_{n-r} 的交点,故 F 是系数在 $K[u^{(1)},\cdots,u^{(r)}]$ 中的 $u^{(0)}$ 的形式,它只能被 L_i 幂的乘积除尽,并且作为 $K[u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)}]$ 中的多项式为不可约,就是说,由定义,它是 M 的相伴形式.

1和2是 M 的相伴形式的必要条件这点立即可由相伴形式的定义得出.条件3也是必要的:只要证明 $v_j^{(k)}$ 为方程组(1)的通解的情形就足够了.这时,$v_j^{(k)}$ 为代数无关的,这是因为正如上面注意到的那样,由给参数以特定值便能从通解 $v_j^{(k)}$ 得到 $u^{(k)}$,甚至当 $u^{(k)}$ 为未定元,从而代数无关时也是如此.于是存在同构 $K(v^{(1)},\cdots,v^{(r)})\cong K(u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$,将 $v^{(k)}$ 映到 $u^{(k)}$.此同构可扩张为同构 $K(v^{(1)},\cdots,v^{(r)},p^{(i)})\cong K(u^{(1)},\cdots,u^{(r)},q)$.点 q 在平面 $u^{(1)},\cdots,u^{(r)}$ 和 M 中;因而 q 必为点 $p^{(i)}$ 中的一个,而且 $F(u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)})$ 含有因子 $\sum q_ju_j^{(0)}$.取反向同构便得出 $F(u^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 被 $L_i(u^{(0)})$ 除尽.

现在我们来证明上述定理中的条件可由此形式的系数 a_λ 间的一些齐次方程式来表达.首先我们证明条件1,2,3等价于在 a_λ、$u^{(k)}$ 和 F 的线性因子 L_i 的系数 $p_j^{(i)}$ 之间的一些代数关系.然后我们从这些条件中消去 $p_j^{(i)}$,最后,我们要求剩余的条件对 $u_j^{(k)}$ 自动满足.

为了将条件1表示为齐次代数方程,我们写

$$F(u^{(0)},u^{(1)},\cdots u^{(r)})=\rho\cdot\prod_{i=1}^{g}\left(\sum_{j=0}^{n}p_j^{(i)}u_j^{0}\right)$$

并比较左右两端的 $u_j^{(0)}$ 乘幂项的系数:

$$\varphi_k(u^{(1)},\cdots,u^{(r)})=\rho\cdot\psi_k(p^{(1)},\cdots,p^{(g)})$$

最后消去因子 ρ,从而这些方程变为齐次的:

$$\varphi_k\psi_l-\varphi_l\psi_k=0 \tag{2}$$

条件2本身就具有齐次方程组的形状:

$$\sum_{j=0}^{n}P_j^{(i)}u_j^{(k)}=0(i=1,\cdots,g;k=1,\cdots,r) \tag{3}$$

条件3必须先被取成另外的样子.说 $F(u^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 被线性形式 $L_i(u^{(0)})$ 除尽等价于说线性形式的所有零点也是 $F(u^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 的零点,即 $L_i(v^{(0)})=0$ 蕴含了 $F(v^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})=0$.因此条件3等价于下面的条件:如果 $v^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)}$ 为 $K(p^{(i)})$ 某个扩域中的元,并且 $L_i(v^{(k)})=0,k=0,1,\cdots,r$,则 $F(v^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})=0$.

线性方程组

$$L_i(v)=\sum_{j=0}^{n}P_j^{(i)}v_j=0$$

的通解由

$$v_j=\sum_{l=0}^{n}S_{jl}P_l^{(i)},\ s_{jl}=-s_{lj}$$

给出.故而条件 3 也等价于下述条件:如果 $s_{jl}{}^{(k)}=-s_{lj}{}^{(k)}(k=0,\cdots,r;l=0,\cdots,n)$为新的不定元,并且,如果我们定义 $v_j{}^{(k)}=\sum s_{jl}{}^{(k)}pl^{(i)}(k=0,1,\cdots,r)$,则

$$F(v^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})=0 \tag{4}$$

现在,如果在此方程中含 $v_j{}^{(k)}=\sum s_{jl}{}^{(k)}p_l{}^{(i)}$并比较就不定元的系数,则我们得到一组齐次条件

$$\chi_h(a_\lambda,p_l{}^{(i)})=0. \tag{5}$$

因此条件 1,2,3 等价于方程(2),(3),(5).将它们看作是确定 $p_j{}^{(i)}$的方程式.这些方程的可解条件是 $a_\lambda,u^{(1)},\cdots,u^{(r)}$的一组齐次方程式.最后将这些方程按不定元 $u_j{}^{(k)}$的乘幂排序并令每个乘幂前的系数为 0.于是我们得到了只包含 a_λ 的一组齐次方程式.因此我们已证明了

定理 2 $K[u^{(0)},u^{(1)},\cdots,u^{(r)}]$中一个 g 次形式F为一g 次n 维流形M的相伴形式的充要条件是形式 F 的系数间的一个齐次方程组.

最简单的情形是 M 为S_n 空间中的一条直线,这时形式 F 为

$$F=\sum\sum p_{ij}u_i^{(0)}u_j{}^{(1)}.$$

其系数是直线 M 的 Plücker 坐标.将前面所述条件 1,2,3 重新列出就是在 p_{ij}间的一组二次关系,它等价于众所周知的线性和二次的关系

$$p_{ij}=-p_{ji},\quad p_{ij}p_{kl}+p_{ik}p_{lj}+p_{il}p_{jk}=0$$

我们已经解释了如何从流形的方程得到相伴形式,即由这些方程和 $r+1$个一般线性方程构造一组结式.现在我们来看一下相反的方向,如何从相伴形式得到流形的方程.

定理 3 如果在相伴形式 $F(u^{(0)},\cdots,u^{(r)})$中把 $u_l{}^{(k)}$替换为

$$u_l^k=\sum_{j=0}^{n}y_js_{jl}^{(k)}(s_{jl}{}^{(k)}=-s_{lj}{}^{(k)})$$

并将得到的新形式 $G(y,s)$按变量 s_{jl}恒等于零就得到了 r 维流形M 的方程组$f_u(y)=0$.

证明：只考虑 M 为不可约的情形就够了. 对流形的一个一般点 $y=p^{(i)}$ 满足方程 $G(y,s)=0$，这件事不过是条件 3 的重新叙述的(4). 当它在某个一般点成立则在每个点 y 也成立.

反之，设 $G(y,s)=0$，即 $F(v^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})=0$，其中 $v_l^{(k)}=\sum y_j s_{jl}^{(k)}$. 我们可选取 $s_{jl}^{(k)}$ 使得 $v^{(k)}$ 为加进了点 y 的任意 $(r+1)$ 个超平面. 我们也可选取这些超平面，使得它们与 r 维流性 M 只交于点 y：选第一个超平面 $v^{(0)}$ 使它不含有 M 的某个点，从而它与 M 的交为一个 $(r-1)$ 维的 M'，然后选第二个超平面 $v^{(1)}$ 使它不包含 M' 的每个不可约分支中的一个点，因而它与 M' 的交为 $(r-2)$ 维的，等等. 现在 $F(v^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})=0$ 且 $F(v^{(0)},v^{(1)},\cdots,v^{(r)})$ 是 M 的方程和超平面 $v^{(0)},\cdots,v^{(r)}$ 方程的结式组的一个因子，故此结式组为零. 因此 M 与超平面 $v^{(0)},\cdots,v^{(r)}$，有公共点，由超平面的构造知此点为 y，因此 y 是 M 的点.

2. 流形的代数系统

流形 M 的相伴形式由它的系数 a_λ 给出. 我们把这组 a_λ 考虑为一个空间 $\mathscr{B}$ 中的一点，那么一个流形 M 对应于 $\mathscr{B}$ 中它的像 a，反之也对，流形 M 的一个代数系统，是 $\mathscr{B}$ 中这些流形的象的一个集合，而此集合本身又是一个代数流形.

由定理 2 知，所有 M(给定维数和次数)形成一个代数系统. 同样的方法可以证明在 S_n 中一已知流形 M_0 中包含的所有流形 M 形成一个代数系统. 其证明必须在定理 2 的证明的方程(2)，(3)，(5)中加入表示点 $p^{(1)},\cdots,p^{(g)}$ 包含在 M_0 中的方程式. 如果已知 M_0 的坐标，则在构造定理 3 中对 $p^{(1)},\cdots,p^{(g)}$ 的方程便没有困难之处. 像在定理 2 的证明一样，人们可以从整个方程组中消去 $p^{(1)},\cdots,p^{(g)}$ 的坐标并得到在 M 的坐标和 M_0 的坐标之间的一组代数关系，它说明 M 包含在 M_0 中.

假定 S 是 S_n 中流形 M 的一个代数系统. 于是总存在一个代数流形 $\mathscr{S}$ 和空间 S_n 之间的一个代数对应，其中 $\mathscr{S}$ 中每点 x 对应于 S_n 中流形 $M(x)$ 的点，使得当 x 遍历流形 $\mathscr{S}$ 时 $M(x)$ 遍历系统 S. 我们选取 $\mathscr{S}$ 为系统 S 在 $\mathscr{B}$ 中的像；于是点 x 是 M 的像 a，而对此对应的方程式便是定理 3 中联系 M 的点 y 和坐标 a_λ 的方程.

从这些方程中消去坐标 a_λ 表明有一个被流形复盖的流形 $\mathscr{T}$,流形 M 的每个代数系统有属于它的 $\mathscr{T}$,而 $\mathscr{T}$是在上述对应中 $\mathscr{S}$ 的像.

我们现在要问,是否相反地在两个流形 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{T}$之间的每个对应都定义了在流形 $\mathscr{T}$上的流形 M 的一个代数系统 K,使得在此对应中 $\mathscr{S}$的点对应此系统的流形 M.我们只限于不可约对应 K 的情形.于是 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{T}$也不可约,由对应的一般理论,对每个 $\mathscr{S}$的点 x 对应于 $\mathscr{T}$的一个代数流形 $\mathscr{T}_x$.但这些流形 $\mathscr{T}_x$ 并不总构成一个代数系统,因为可能有些流形有不同的维数,这是熟知的事实(见文尾的例子).即便所有 $\mathscr{T}_x$ 有同一维数,但也可能发生某些 $\mathscr{T}_x$ 比其他的具有更高的次数.例如,将具有结点的三次平面曲线 C^3 的所有点与点 O 连接起来,则得到一个对应,在此对应下,C^3 的一个一般点对应于一条直线而 O 点对应于两条线(二重点的切线).故而人们必须加上一些限制使得 $\mathscr{T}_x$ 构成一个代数系统.

定理 4 如果在一个不可约对应 K 中,每个 $\mathscr{S}$的点 x 对应于 $\mathscr{T}$中点的一个 r 维流形 $\mathscr{T}_x$,并且如果 $\mathscr{S}$不含有任何多重点,则在按照 ZAG. VI. §4 所定义的重数那样来计算不可约分支重数的话,象流形 $\mathscr{T}_x$ 便构成了一个代数系统.

在此定理中我们假定了域 K 是完全的,这也与 ZAG. VI 中所作假定一致.

证明:取 $\mathscr{S}$的一个一般点 ξ,为了得到其流形 $\mathscr{T}_\xi$ 的相伴形式就必须定出 $\mathscr{T}_\xi$与 r 个一般超平面 $u^{(1)},\cdots,u^{(r)}$的交点 $p^{(1)},\cdots,p^{(g)}$,并取乘积

$$F(u^{(0)})=\rho\cdot\prod_{i=1}^{g}L_i(u^{(0)})=\rho\cdot\prod_{i=1}^{g}\Big(\sum_{j=0}^{n}P_j^iu_j^{(0)}\Big). \tag{1}$$

由 §1 的方程(2)知 a_λ, $u^{(k)}$和 $p^{(i)}$之间的关系由一组齐次关系

$$H(u^{(1)},\cdots,u^{(r)},a\lambda,p^{(1)},\cdots,p^{(g)})=0, \tag{2}$$

给出,它等价于方程(1).

如果我们把一般点 ξ 换作特定点 x,则 $\mathscr{T}_x$ 的不可约部分的重数可按 ZAG, VI, §4 由一般超平面 $u^{(1)},\cdots,u^{(r)}$与 $\mathscr{T}_x$ 相交求出.人们必须看出 $p^{(i)}$ 变化成某些交点 $q^{(i)}$. $\mathscr{T}_x$ 一个分支的重数是一个数,它说明这个分支与这些超平面的交点是 $q^{(i)}$的次数多少.用一个适当的特定化 $a_\lambda\to a'_\lambda$ 扩张这个保持关系的特定化时,则关系(2),以及分解式(1)也保持了.因此 $\mathscr{T}_x$ 分支的重数等于它们的相伴形式在具系数 a'_λ 的相伴形式 $F'(u^{(0)})$的分解式中

所具有的重数.但这意味着特定化的 a'_λ 正好是特定化的流形 T_x 的坐标.

现在,一般点偶(ξ,a)诱导了 $\mathscr{L}$ 与像空间 $\mathscr{B}$之间的一个不可约对应.此对应的点偶(x,a)恰好对应于我们从一般点偶(ξ,a)经保持关系的特定化得到的东西.那些出现在这个对应中的点 a'形成了空间 $\mathscr{B}$中的一个代数流形 A.故流形 $\mathscr{T}_x$ 构成了我们意义下的代数系统.

如果我们去掉 $\mathscr{L}$不含任何重点和 $\mathscr{L}$中每点正好只对应一个 r 维流形 $\mathscr{T}_x$ 的假定条件,则只有证明的最后部分还有效.因此存在一个具有一般点偶(ξ,a)的不可约对应,使 $\mathscr{L}$的每个特定点 x 对应于一个或以上的,最终为无穷多个点 a'.对每个点 a'有一个流形 $M(a')$,其维数为 r,而且我们可以证明这些流形 $M(a')$的并正好是流形 $\mathscr{T}_x$.如果 y 是 $\mathscr{T}_x$ 中一点,则(x,y)是对应 K 的一般点偶(ξ,η)的保持关系的特定化,而且我将此对应扩张到特定化$(\xi,\eta,a)\to(x,y,a')$,其中 a' 属于象流形 A,特别在这里保持了那些说 η 在$M(a)$中的这个代数关系.因此 y 在流形$M(a')$中.反之,$M(a')$的每点也在 $\mathscr{T}_x$ 中,这是因为 ξ 与 a 之间的表示$M(a)$在 $\mathscr{T}_x$ 上的代数关系被特定化 $\xi\to x,a\to a'$保持下来了.

这样我们已证明了

定理5 设 K 是 $\mathscr{L}$和 $\mathscr{T}$之间的一个不可约对应.如果 ξ 是 $\mathscr{L}$的一个一般点,它对应于 $\mathscr{T}$中一个 r 维流形 $M(a)$,其象点为 a,则一般点偶(ξ,a)定义了 $\mathscr{L}$和 $\mathscr{B}$中的一个像空间 A 之间的一个不可约对应,它对每个特定点指配了一个或更多个的点 a'.这些点对应 K 中的点 x.流形 $M(a')$构成一个代数系统 S.

如果有某种规则对流形 $\mathscr{L}$的一般点 ξ 指配一个坐标在$K(\xi)$中的点 η,并且如果 η 是某个流形 N 的一般点,我们则说:"假定 ξ 遍历流形 $\mathscr{L}$,则 η 遍历象流形 N."这意味(ξ,η)是 $\mathscr{L}$和 N 间一个不可约对应的一般点偶,而且此对应对 L 中每点至少指配 N 中一个点,反之对每个 N 中点也至少有 L 中一个点.

更一般地:如果有某个规则对一个流形 $\mathscr{L}$的一般点去指配一个其方程在 $K(\xi)$中的一个 r 维流形 M_ξ,并且如果 M_ξ 是一个流形的代数系统 S 的一般元,则我们会说:"假定去遍历流形 $\mathscr{L}$则 M_ξ 遍历系统 S".如果 $\mathscr{T}$是个被 S 覆盖的流形,则我们也说"M_ξ 遍历 $\mathscr{T}$".第一个陈述的意思是说在 $\mathscr{L}$和 S 间有一个不可约对应,它给一般点 ξ 指配了 M_ξ,并对 $\mathscr{L}$的每个特定点至少指配了系统 S 的一个流形 M.如果我们对每个流形 M 指配了 M 的点集,则我

们便得到了在 S 与流形 T 间的一个对应. 这两个对应由方程

$$f_{\mu}(x,a)=0 \text{ 或 } g_{\nu}(a,y)=0,$$

分别描述,其中 a_{λ} 为 S 的流形 M 的坐标,x_k 为 L 中一点的坐标,y_k 是 T 中一点的坐标. 从这些方程中消去 a_{λ} 便得到 L 和 T 之间的一个对应 K,它对一点 x 指配了系统 S 中的相伴流形的所有点 y. 这个对应 K 和系统 S 之间的关系在定理 5 中有描述.

下面的例子可解释定理 5,设 g,h 为 S_3 中两条不相交的直线,并设 L 为一与 g 和 h 交于 G 和 H 的一个平面,恰好有一条直线 M_{ξ} 联接了 L 的一个一般点并与 g 和 h 相交. 如果 ξ 遍历此平面则 M_{ξ} 遍历与射线 g,h 同在的线汇,就是说,M_{ξ} 是这个线汇的一般元. L 中每个点 x 正好对应于此线汇的一条直线,但要除去点 G 和 H,它们对应于一个线束. 如果对 L 中每个点指配包含在联接 x 和 g,h 的直线上所有点,则我们得到 L 和 S_3 之间的一个对应,其中对应于 L 中一点 x 的点 y 一般来说构成一条直线. 但与点 G 和 H 相配的 y 并不构成直线,而是一个平面,它各自为通过 G 和 H 的的线汇的并,按定理 5,它必定如此.

编者注: 此文是周炜良和范德瓦尔登联合署名的论文 Zur algebraische Geometryie IX,刊于 Math. Ann. 113(1937),692—704. 原文是德文. 收入由 S. S. Chern 和 V. V. Shokurov 主编的 The Collected Papers of WEI-LIANG CHOW 时,由南开大学数学所的 Wen-ling Huang 译成英文. 这里刊出的中译文是胥鸣伟教授据英译文译出的.

附录4

关于 Witt 李环[1]

张禾瑞

E. Witt 最早引入了下面的特征 $p>2$ 的域 k 上的单李环 L: L 是以 e_0, $e_1,\cdots,e_{p-1}$为基的 k-向量空间,其元素李括号运算为:

$$[e_i,e_j]^{②}=(j-i)e_{i+j}(0\leqslant i,j\leqslant p-1),$$

这里下标 $i+j$ 看成模p 的同余数. 容易验证, L 是一个李环,且是单的.

本文的目的是确定 L 的自同构群及其所有的不可约表示. 对于经典单李环,其自同构群是相应的连续群. 而且,此情形下的表示理论是清楚的,共有可数个不可约表示,且其次数是无界的. 可以想象,对于 Witt 李环 L 来说,情况完全不同. 事实上, L 的自同构群同构于 $K[x]/(x^p)$中的多项式的一个置换群; L 的不可约表示依赖于p 个参数,且次数不超过 $p^{\frac{p-1}{2}}$.

本工作得到了 E. Witt 与 H. Zassenhaus 两位先生的帮助和鼓励,在此对他们表示最真诚的感谢.

Ⅰ. Witt 李环的自同构群

H. Zassenhaus 曾猜测 Witt 李环的自同构群提供了新的单群[3]. 但遗憾的是,近来的研究表明这类群是可解的. 作者最初的关于这个结果的证明有

---

① 张禾瑞先生文章中所指的"李环",实际就是今天我们所称的李代数,为保持文章的历史原貌,这里我们仍用李环这一术语. ——编者注.

② 译注:原文中记为 $e_i\circ e_j$,现在以通常记号代之,其他一些符号也有所变动.

③ H. Zassenhaus, Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Hambuurger Abhandlungen, Bd. 12, S. 5. -在文中用(Z)表示该文献,同时将标明页码,如(Z5).

点繁琐.E.Witt 在发现他抽象地定义的李环能够由一个多项式环来实现后,成功地给出上面结果的一个简捷漂亮的证明.在他友善的许可下,这里我们给出 Witt 的证明.

我们考虑多项式整环 $k[x]$.我们在模 x^p 下计算 $k[x]$的多项式,由此得到一个环 $k[x]/(x^p)$,其元素具有形式:

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{p-1}x^{p-1},\ a_i\in k.$$

对于 $k[x]/(x^p)$中的每个多项式 $f(x)$,我们定义

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+(p-1)a_{p-1}x^{p-2}.$$

直接验证,下面的运算规则满足:

1.$(f+g)'=f'+g'$.

2.$(fg)'=f'g+fg'$.

3.$f(g)'=f'(g)g'$.

4. 如果 $g=f_1+f_2$,那么 $g(\varphi)=f_1(\varphi)+f_2(\varphi)$.

5. 如果 $f=f_1f_2$,那么 $f(\varphi)=f_1(\varphi)f_2(\varphi)$,这里 φ 是一个没有常数项的多项式:

$$\varphi=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{p-1}x^{p-1}.$$

6.$f(\varphi)[\psi]=f[\varphi(\psi)]$,这里 φ,ψ 是没有常数项的多项式.

现在定义两个多项式 f 与 g 的李括号运算:

$$[f,g]=fg'-gf'.$$

容易验证,上面的运算定义了一个李环.令

$$e_i'=(1+x)^{i+1}(i=-1,0,1,\cdots p-2).$$

易见 e_i' 构成了这个李环的一个基,并且满足$[e_i',e_j']=(j-i)e'_{i+j}$.因此,上面定义的多项式构成的李环即为本文开始定义的李环 L.

但是,在计算中基$\{e_i'\}$并不实用.实际上,我们将使用基

$$e_i=x^{i+1}(i=-1,0,1,\cdots,p-2).$$

它们满足:

$$[e_i,e_j]=\begin{cases}(j-i)e_{i+j}, & 若\ i+j<p-1,\\ 0, & 若\ i+j\geqslant p-1.\end{cases}$$

利用这些多项式及这个基,我们将在 $p\geqslant5$ 的条件下考察 L 的自同构群.

首先,我们证明下面的引理.

引理 L 的每个自同构将 x^{p-1}映到自身的一个倍数,即:

$$x^{p-1} \longmapsto cx^{p-1}, c \in k.$$

证明:设 σ 是 L 的一个自同构且

$$\sigma(x^{p-1}) = a_0 + a_1 x + \cdots a_{p-1} x^{p-1} = : y.$$

用 ζ 记向量$(1, x, \cdots, x^{p-1})$. 于是有

$$[y, \zeta] = \zeta Y,$$

这里 Y 表示矩阵

$$\begin{bmatrix} -a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2a_2 & 0 & 2a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ -3a_3 & -a_2 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 2a_{p-2} & 4a_{p-3} & 6a_{p-4} & \cdots & -2a_0 & 0 \\ a_{p-1} & 3a_{p-2} & 5a_{p-3} & \cdots & -3a_1 & -a_0 \\ 0 & 2a_{p-1} & 4a_{p-2} & \cdots & -4a_2 & -2a_1 \end{bmatrix}$$

因为 x^{p-1}零化 $p-2$ 个线性无关的元素 $x^2, x^3, \cdots, x^{p-1}$,所以 y 也必须零化 $p-2$ 个线性无关的元素. 由此得出,矩阵 Y 的每个三阶子式的行列式为零. 设 ν 是 $0, 1, \cdots, p-2$ 中使得 $a_\nu \neq 0$ 的最小的数. 由于 $p \geq 5$, Y 中至少有三个 $\lambda_1 a_\nu, \lambda_2 a_\nu, \lambda_3 a_\nu$ 不为零. 而三阶子式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_\nu & 0 & 0 \\ * & \lambda_2 a_\nu & 0 \\ * & * & \lambda_3 a_\nu \end{vmatrix} = 0,$$

这是一个矛盾. 因此,我们有

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{p-2} = 0.$$

证毕.

定理 1 设 $\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_{p-1} x^{p-1}$且 $a_1 \neq 0$. 于是对应

$$f(x) \longmapsto \frac{f[\varphi(x)]}{\varphi'(x)}$$

给出了 L 的一个自同构$\sigma_{\varphi(x)}$. 同时,我们有

$$\sigma_{\psi(x)} \sigma_{\phi(x)} = \sigma_{\phi(\psi(x))}.$$

进一步,等式 $\sigma_{\varphi(x)} = \sigma_x$ 导出 $\varphi(x) = x$,换言之:所有同构 $\sigma_{\varphi(x)}$构成一个群 G,且它同构于以多项式

$$a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_{p-1} x^{p-1} (a_1 \neq 0)$$

作代换导出的 $k[x]/(x^p)$ 中的多项式的一个置换群.

定理 2 G 是 L 的自同构群.

定理 1 的证明非常简单,前两个论断可根据运算规则 1—6 直接计算得到.最后一个诊断由下面等式导出

$$\sigma_{\varphi(x)}(1)=\frac{1}{\varphi'(x)}=1.$$

注意条件 $a_1\neq 0$ 保证 $\frac{1}{\varphi'(x)}$ 是有意义的.下面我们给出定理 2 的证明.

定理 2 的证明:设 τ 是 L 的任意一个自同构.我们希望证明 τ 属于 G.为此只需证明 $G\tau$ 包含 L 的恒等映射.

由引理

$$\tau(x^{p-1})=ax^{p-1}.$$

令

$$\tau(1)=a_0+a_1x+\cdots+a_{p-1}x^{p-1}.$$

于是

$$\tau(-x^{p-2})=\tau([1,x^{p-1}])=[\tau(1),\tau(x^{p-1})]=-a_0ax^{p-2}-2a_1ax^{p-1}.$$

由于 $\tau(-x^{p-2})$ 不可能是 $\tau(x^{p-1})$ 的一个倍数,所以 $a_0\neq 0$.由此推出 $\tau_1=\sigma_{a_0x}\tau$ 也属于 $G\tau$,并且

$$\tau_1(1)=1+b_1x+\cdots+b_{p-1}x^{p-1}(b_i\in k).$$

若 τ_2 是 $G\tau$ 中的同构,并具有形式

$$\tau_2(1)=1+c_vx^v+\cdots(1\leqslant v<p-1),$$

则 $G\tau$ 也包含 $\tau_3=\sigma_\varphi\tau_2$(其中 $\varphi=x+\frac{cv}{v+1}x^{v+1}$),并且

$$\tau_3(1)=1+d_{v+1}x^{v+1}+\cdots.$$

如此下去,最后得到 $G\tau$ 自身包含一个自同构 T_4 满足

$$\tau_4(1)=1+bx^{p-1},\tau_4(x^{p-1})=cx^{p-1}.$$

将 τ_4 作用于等式

$$vx^{p-v-1}=[x^{p-v},1]\ (v=1,2,\cdots,p\text{-}1),$$

我们得到

$$\tau_4(x^{p-v-1})=cx^{p-v-1}(v=1,2,\cdots,p-2).$$

$$1+bx^{p-1}=c+2bcx^{p-1}.$$

因而 $c=1,b=0$,即 τ_4 是恒等映射.证毕.

由上面的两个定理我们有 L 的自同构群同构于 $k[x]/(x^p)$ 中的多项式的一个置换群 $\mathscr{P}$.对于 $v=2,3,\cdots,p-1$,形如 $x+a_vx^v+\cdots$ 的多项式定义的置换构成 $\mathscr{P}$的一个子群 $\mathscr{P}_v$.于是得到 $\mathscr{P}$的一个子群链 $\mathscr{P},\mathscr{P}_2,\cdots,\mathscr{P}_{p-1},1$,其相邻子群的商群是交换的,即 $\mathscr{P}$是可解的.因而 L 的自同构群 G 是可解的.

Ⅱ.Witt 李环的不可约表示

§1 概述

本章中我们假定 $p\geq3$,且 k 是代数闭域.

本章的讨论与论文(Z)有着密切的联系.H.Zassenhaus 在(Z)中证明了如下结果:设 R 是特征 $p>0$ 的域 k 上的有限维李环,e 是 R 中的一个元素,I 是 R 的一个理想使得 $\langle e,I\rangle=R$,这里 $\langle e,I\rangle$ 表示由 e、I 生成的 L 的子环.于是

1.若 R 的不可约表示 $\mathfrak{M}$ 包含一个不可约 I-模 $\mathfrak{M}'$,则

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'\oplus e\mathfrak{M}'\oplus\cdots\oplus e^{m-1}\mathfrak{M}',$$

并且对于 $j=1,2,\cdots,m-1$,

$$e^j\mathfrak{M}'\ (mod\,\mathfrak{M}'\oplus e\mathfrak{M}'\oplus\cdots\oplus e^{j-1}\mathfrak{M}')$$

I-同构于 $\mathfrak{M}'$.(Z62)

2.对于每个不可约 I-模 $\mathfrak{M}'$,存在一个不可约 R-模 $\mathfrak{M}$.将其看作 I-模时包含$\mathfrak{M}'$.(Z74)

3.当 k 是代数闭域时,则 m 是p 的方幂,即 $m=p^\mu(\mu\geq0)$.(Z84,85)

依据这些结果,H.Zassenhaus 证明了幂零李环的不可约表示的主定理(Z97):特征为素数 p 的代数闭域k 上的一个 r-维幂零李环H 上的不可约表示的次数均为 p 的方幂.对于 H 的正则基$h_1,h_2,\cdots,h_r$ 中每个元素 h_i,选取一个 $\alpha_i\in k$.于是存在唯一的一个 H 的不可约表示使得α_i 是对应于h_i 的特征值.这里,$h_1,h_2,\cdots,h_r$ 称为正则基,如果$[h_i,h_j]\in\langle h_{i+1},\cdots,h_r\rangle$.

现在我们以 Witt 李环 L 的基$e_i(i=-1,0,\cdots,p-2)$为出发点.已知它们满足

$$(1)\qquad [e_i,e_j]=\begin{cases}(j-i)e_{i+j}, & 若\ i+j<p-1;\\ 0, & 若\ i+j\geq p-1.\end{cases}$$

于是元素

$$e_i, e_{i+1}, \cdots, e_{p-2} (i = 0, 1, \cdots, p-2)$$

生成 L 的一个子环.从而得到 L 的一个子环链

$$L \supset L_0 \supset L_1 \supset \cdots \supset L_{p-2}.$$

显然,$L_{i+1}(i \geqslant 0)$是 L_i 的一个理想,并且$\langle e_i, L_{i+1}\rangle = L_i$.因而 Zassenhaus 的结果 1,2 与 3 可应用到 $L_i(i \geqslant 0)$上.除 L_0 之外,其它的 L_i 都是幂零的.于是我们有相应的 Zassenhaus 定理.

进一步,注意到:若一个不可约 L-模 $\mathfrak{M}$ 包含一个不可约 L_0-模 $\mathfrak{M}_0$,则有分解(无论 L_0 是不是 L 的理想)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 + e_{-1}\mathfrak{M}_0 + e_{-1}^2\mathfrak{M}_0 + \cdots + e_{-1}^{e-1}\mathfrak{M}_0.$$

最后,我们得到

定理 1 对于 L 或 $L_i(i \geqslant 0)$的一个不可约表示:

$$e_j \longmapsto E_j.$$

则矩阵 E_j 满足 p 次方程

$$(2) \qquad E_j^p = \varepsilon_j E (j \neq 0)$$

$$E_0^p - E_0 = \varepsilon_0 E,$$

这里 $\varepsilon_j(j = -1, 0, \cdots, p-2)$是 k 中的元素,E 是单位矩阵.

由这个事实,我们将得到 L 的所有不可约表示,并且将证明

a)除一个例外,L 的所有的不可约表示的次数为 p 的方幂(这个例外表示的次数为 $p-1$);

b)对于给定的 $\varepsilon_j(i = -1, 0, \cdots, p-2)$,存在 $1, p$ 或 $p-1$ 个不可约表示.它们的对应于 e_i 的矩阵 E_i 满足定理 1 中的等式(2).

这些结果是 Zassenhaus 定理的类比,因为 ε_i 与 E_i 的特征值是相关的.实际上,矩阵 $E_i(i \neq 0)$有唯一的特征值 $\varepsilon_i^{\frac{1}{p}}$;而 E_0 的特征值为方程 $x^p - x = \varepsilon_0$的解.

接下来我们首先给出定理 1 的证明及关于 L_0 的若个定理,由此导出论断 a)与 b).这里我们将频繁地用到 Cartan 的一个公式及一般矩阵理论中一个已知的定理.

Cartan 公式 给定李环 $\mathscr{S}$在一个结合环 $\mathscr{R}$ 中的一个表示.设 $a, b \in \mathscr{S}$,$A, B \in \mathscr{R}$ 是其对应的元素.则有

$$(3a) \qquad AB^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} B^\nu [A, B^{(n-\nu)}],$$

这里

$$[A,B^{(i)}]=[\cdots[[A,\underbrace{B],B],\cdots,B}_{i}].$$

该公式可由条件 $AB=BA+[A,B]$ 通过对 n 作归纳容易推出. 特别地, 给出了 $\mathscr{S}$ 的一个模 $\mathfrak{M}$, (3a) 也可写成形式

$$ab^n v=\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{v}b^v[a,b^{(n-v)}]v(a,b\in\mathscr{S},v\in\mathfrak{M}), \tag{3}$$

矩阵定理 如果 $M_1,M_2,\cdots,M_t$ 是代数闭域上的一个不可约矩阵系, 则它们生成全矩阵代数. 若一个矩阵 A 与所有的 M_i 交换, 则 A 是一个单位矩阵的倍数. 若所有的 M_i 彼此可交换, 则它们的阶数为 1.

§2 定理 1 的证明及关于 L_0 若干定理

定理 1 的证明: 设 $\mathfrak{M}$ 是 L 或 $L_i(i\geqslant 0)$ 的一个不可约表示, 且设相应于 e_s 的表示矩阵为 $E_s(e_s\in L$ 或 $L_i)$. 在 (3) 中令 $a=e_s$, $b=e_j(e_s,e_j\in L$ 或 $L_i)$, $n=p$. 因为域 k 的特征为 p, 所以我们得到

$$e_se_j^pv=[e_s,e_j^{(p)}]v+e_j^pe_sv(v\in\mathfrak{M}).$$

现在由 (1) 导出对于固定的 $j\neq 0$ 有

$$[e_s,e_j^{(p)}]=0(s=-1,0,\cdots,p-2);$$

对于 $j=0$ 有

$$[e_s,e_0^{(p)}]=-se_s=[e_s,e_0](S=-1,0,\cdots,p-2).$$

从而, 对于固定的 $e_j\in L$ 或 $L_i(j\neq 0)$ 有

$$e_se_j^pv=e_j^pe_sv(e_s\in L\text{ 或 }L_i);$$

对于 e_0, 在 L_i 中有

$$e_se_0^pv=e_0^pe_sv+(e_se_0-e_0e_s)v(e_s\in L\text{ 或 }L_i).$$

这意味着, 矩阵 $E_j^p(j\neq 0)$, $E_0^p-E_0$ 与所有的 E_s 可交换. 由矩阵定理导出所要证明的论断.

现在我们将结合定理 1 与 Zassenhaus 的结果来详细地考察 L_0 的不可约表示.

下面我们称 ε_j 为相应的表示的不变量. 设 $\mathfrak{M}_0$ 为 L_0 的一个不可约表示, 其不变量为 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{p-2}$. 用 r 记着最小的整数使得当 $i\geqslant 2r+1$ 时, 有

$\epsilon_i = 0$. 显然,我们始终有 $0 \leqslant r \leqslant \frac{p-2}{2}$.

进一步,构造滤链

(4) $$\mathfrak{M}_0 \supset \cdots \supset \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_{s+1} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{M}_{p-2} \neq 0,$$

这里 $\mathfrak{M}_i$ 是不可约 L_i-模并且 $\mathfrak{M}_s$ 是第一个使得等式成立的模. 于是滤链(4)有如下的性质.

定理 2 (a) $s \leqslant \frac{p-1}{2}$;

(b) $\dim \mathfrak{M}_s = 1$;

(c) $\dim \mathfrak{M}_i = p \times \dim \mathfrak{M}_{i+1} (i < s)$;

(d) $s = r$.

证明:(a)首先,子环 $L_{\frac{p-1}{2}}$ 是交换的. 因此 $L_{\frac{p-1}{2}}$ 的表示矩阵是相互交换的. 根据矩阵定理,$\mathfrak{M}_{\frac{p-1}{2}}$ 的维数为 1. 所以,在(4)中有 $\mathfrak{M}_{\frac{p-1}{2}} = \mathfrak{M}_{\frac{p+1}{2}}$,即 $s \leqslant \frac{p-1}{2}$.

(b)由(a)可知,若 $s \geqslant \frac{p-3}{2}$,则该命题正确. 还需证明 $s < \frac{p-3}{2}$ 时的情形. 对于 L_s 的表示 $\mathfrak{M}_s$,令 $e_i (i \geqslant s)$ 对应的表示矩阵为 A_i. 我们引入

$$\mathfrak{B}_i = \text{由}(A_i, A_{i+1}, \cdots, A_{p-2})\text{张成的模},$$

$$\mathfrak{C} = \text{由 } A_{s+1}, A_{s+2}, \cdots, A_{p-2} \text{生成的结合环}.$$

根据假设,L_{s+1} 的表示 $\mathfrak{C}_{s+1}$ 是不可约的. 由矩阵定理,$\mathfrak{C}$ 是一个全矩阵代数. 于是

$$\mathfrak{B}_s \subseteq \mathfrak{C}.$$

由 $s < \frac{p-3}{2}$ 知 $p-2-s > s+1$. 对于 $p-2-s \geqslant t > s+1$,考虑 $\mathfrak{B}_t, \mathfrak{B}_{t-1}$ 与 $\mathfrak{B}_{t+s}$. 我们有如下事实. 若

(5) $$[\mathfrak{B}_t, \mathfrak{B}_{s+1}] = 0,$$

则 $[\mathfrak{B}_t, \mathfrak{C}] = 0$. 由运算规则(1)有

$$[A_{t-1}, \mathfrak{B}_{s+1}] \subseteq \mathfrak{B}_{t+s} = [\mathfrak{B}_t, \mathfrak{B}_s] \subseteq [\mathfrak{B}_t, \mathfrak{C}] = 0.$$

再与(5)结合,我们最后得到

$$[\mathfrak{B}_{t-1}, \mathfrak{B}_{s+1}] = 0.$$

由(1)知(5)在 $t = p-2-s$ 时成立,所以(5)对于 $t = s+1$ 也成立,即

$$[\mathfrak{B}_{s+1}, \mathfrak{B}_{s+1}] = 0.$$

因此,由 $\mathfrak{M}_s$ 诱导的 L_{s+1} 的不可约表示 $\mathfrak{B}_{s+1}$ 是交换的,从而根据矩阵定理,其维数为1.

(c)由 Zassenhaus 的结果1与3,对于 $i=0,1,\cdots,s-1$,我们有

$$\mathfrak{M}_i=\mathfrak{M}_{i+1}\oplus e_i\mathfrak{M}_{i+1}\oplus\cdots\oplus e_i^{\mu_i-1}\mathfrak{M}_{i+1},$$

其中 μ_i 不为零,另一方面,由定理1有

$$e_i^p\mathfrak{M}_{i+1}\subseteq\mathfrak{M}_{i+1}\oplus e_i\mathfrak{M}_{i+1}.$$

所以 $\dim\mathfrak{M}_i=p\times\dim\mathfrak{M}_{i+1}$.

(d)由(b),$\mathfrak{M}_s$ 的维数为1. 令 $\mathfrak{M}_s=\{v\}$. 根据定理1,$e_i(i\geqslant s)$ 由 $\varepsilon_i^{\frac{1}{p}}$ 表出(即 $e_iv=\varepsilon_i^{\frac{1}{p}}v$). 于是运算规则(1)推出,当 $i\geqslant 2s+1$ 时,$\varepsilon_i=0$. 所以 $r\leqslant s$. 假设 $r<s$. 则所有的 $\varepsilon_i=0(i\geqslant 2s-1)$,并且

(6) $$[e_i,e_{s-1}^{(\nu)}]v=0,\ \forall\,\nu\neq 0,\ i\geqslant s.$$

因为(3)和(6),对于 $i\geqslant s,n=0,1,\cdots,p-1$,有

$$e_ie_{s-1}^nv=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}e_{s-1}^{n-\nu}[e_i,e_{s-1}^{(\nu)}]v=e_{s-1}^ne_iv=\varepsilon_i^{\frac{1}{p}}e_{s-1}^nv.$$

但是这意味着 $\mathfrak{M}_{s-1}$ 是可约的,与假设矛盾. 因此 $r=s$. 证毕.

对于 L_0 的不变量为 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{p-2}$ 的不可约表示 $\mathfrak{M}_0$,我们证明

引理1 $\mathfrak{M}_0$ 的算子

$$e_0'=e_0+\lambda,\ e_i'=e_i\quad(i>0)$$

给出了一个同构于 L_0 的李代数 L_0',并且它们定义了 L_0' 的一个不可约表示,其不变量为

$$\varepsilon_0'=\varepsilon_0+\lambda^p-\lambda,\ \varepsilon_i'=\varepsilon_i(i>0).$$

证明:由运算规则(1)可直接导出对应 $e_i\longmapsto e_i'$ 给出了一个同构. 因为 $\mathfrak{M}$ 是不可约 L_0-模,所以作为 L_0'-模,$\mathfrak{M}_0$ 也是不可约的. 由算子等式

$$e_0^p-e_0=\varepsilon_0,\ e_i^p=\varepsilon_i$$

导出等式

$$e_0'^p-e_0'=\varepsilon_0+\lambda^p-\lambda,\ e_i'^p=\varepsilon_i(i>0).$$

证毕.

有了上面的结果,我们现在可以对具有给定不变量的 L_0 的不可约模的个数及维数给出精确的估计.

设 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{p-1}$ 给定,r 如上定义.

定理 3 对于给定的不变量,当 $r\neq 0$ 时,L_0 有唯一的不可约表示;而当 $r=0$ 时,有 p 个不可约表示 . 在这两种情形下,其次数均为 p^r.

证明:因为 L_1 是幂零的,所以由 Zassenhaus 定理,只有唯一的一个不可约 L_1-模,其不变量为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{p-2}$. 由 Zassenhaus 结果 2,存在一个包含 $\mathfrak{M}_1$ 的不可约 L_0-模 $\mathfrak{M}_0$. 根据引理 1,我们可以假定 $\mathfrak{M}_0$ 有不变量 ε_0.

若 $r=0$,则由定理 2 知 $\mathfrak{M}_0$ 的维数为 1. 令 $\mathfrak{M}_0=\{v\}$. 于是

$$e_0v=\delta v,\ e_iv=0\quad(i>0),$$

并且 $\delta^p-\delta=\varepsilon_0$. 反过来,这个方程的 p 个不同的解给出了 L_0 的 p 个不等价的不可约表示,其不变量为 $\varepsilon_0,0\cdots,0$.

现在设 $r\neq 0$. 由定理 2 和定理 1 我们有

(7) $$\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_1\oplus e_0\mathfrak{M}_1\oplus\cdots\oplus e_0^{p-1}\mathfrak{M}_1$$
$$e_0^p=e_0v+\varepsilon_0v(v\in\mathfrak{M}_1).$$

反过来,L_0-模 $\mathfrak{M}_0$ 由 L_1-模 $\mathfrak{M}_1$ 通过等式(7)惟一地定义 . 所以只有一个具有给定不变量的 L_0-模的等价类 . 由定理 2 知,该表示的次数为 p^r.

§3 不可约 L-模的性质

在我们对 L_0 的不可约模有了清楚的了解之后,现在我们考察 L 的不可约表示 . 假设给定了一个不可约 L-模,我们将试图找出它满足的一些必要条件 .

设 $\mathfrak{M}$ 是一个不可约 L-模,其不变量为 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$. 作为 L_0-模,它包含一个不可约 L_0-模 $\mathfrak{M}_0\neq 0$. 令

$$\mathfrak{m}_\nu=\mathfrak{M}_0+e_{-1}\mathfrak{M}_0+\cdots+e_{-1}^{\nu-1}\mathfrak{M}_0\quad(\nu=1,2,\cdots).$$

引理 2 设 $\mathfrak{M}$ 是包含在 $\mathfrak{m}$ 中的 L_0-模 . 则 $\mathfrak{m}+e_{-1}\mathfrak{m}$ 也是一个 L_0-模 .

证明:引理由等式

$$e_i(e_{-1}\mathfrak{m})=e_{-1}(e_i\mathfrak{m})-(1+i)e_{i-1}\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{m}+e_{-1}\mathfrak{m}\quad(i=0,1,\cdots,p-2)$$

直接得出 .

根据上面的引理,$\mathfrak{m}_\nu$ 是一个 L_0-模 . 于是滤链

$$\mathfrak{m}_1\subseteq\mathfrak{m}_2\subseteq\cdots$$

必须在某处稳定 . 设 g 是最小的整数使得 $\mathfrak{m}_g=\mathfrak{m}_{g+1}$. 于是 $\mathfrak{m}_g$ 是一个非零的 L-模 . 由于 $\mathfrak{M}$ 是不可约的,所以

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_g = \mathfrak{M}_0 + e_{-1}\mathfrak{M}_0 + \cdots + e_{-1}^{g-1}\mathfrak{M}_0.$$

由(3),对于 $i=0,1,\cdots,p-2, v\in\mathfrak{M}_0$,有

$$e_i e_{-1}^n v = \sum_{\nu=1}^{n}\binom{n}{\nu} e_{-1}^{\nu}[e_i, e_{-1}^{(n-\nu)}]v,$$

或者

(8) $$e_i e_{-1}^n v \equiv e_{-1}^n e_i v \pmod{\mathfrak{m}_n}\ (i=1,2,\cdots,p-2),$$
$$e_0 e_{-1}^n v = e_{-1}^n (e_0 - n) v.$$

这首先表明,$\mathfrak{m}_{n+1}/\mathfrak{m}_n$ 是一个 L_0-模 . 当 $n<g$ 时,$\mathfrak{m}_{n+1}/\mathfrak{m}_n\neq 0$. 设 $\mathfrak{m}'\neq 0$ 是 $\mathfrak{m}_{n+1}/\mathfrak{m}_n$ 的一个不可约子模 . 由(8)推出,$\mathfrak{m}'$的不变量为 $\varepsilon_0-(n^p-n)=\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{p-2}$. 根据定理3,$\mathfrak{m}'$与不可约 L_0-模 $\mathfrak{M}_0$ 有相同的维数 . 另一方面,有

$$\dim \mathfrak{m}' \leqslant \dim \mathfrak{m}_{n+1}/\mathfrak{m}_n \leqslant \dim \mathfrak{M}_0.$$

所以等式成立 . 由此我们得到

定理4 对于每个不可约 L-模 $\mathfrak{M}$,我们有

(9) $$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0 \oplus \cdots \oplus e_{-1}^{g-1}\mathfrak{M}_0.$$

并且,对于 $j=1,2,\cdots,e-1$,

$$e_{-1}^j\mathfrak{M}_0 \pmod{\mathfrak{M}_0 \oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0 \oplus \cdots \oplus e_{-1}^{j-1}\mathfrak{M}_0}$$

是一个不可约的 L_0-模,它与 $\mathfrak{M}_0$ 有相同的不变量 .

由定理1,我们得到

$$g \leqslant p.$$

我们现在希望具体地确定 g. 为了实现这个目标,我们给出若干公式及两个引理 .

对于任意的 $v\in\mathfrak{M}_0$,我们有

$$e_{-1}(e_{-1}^{g-1}v) = e_{-1}^g v = \sum_{j=0}^{g-1} e_{-1}^j S_j v,$$

这里 S_j 是 $\mathfrak{M}_0$ 的 k-线性变换 . 它们满足由表示条件导出的等式

(10) $$e_{-1}e_i(e_{-1}^{g-1}v) - e_i e_{-1}(e_{-1}^{g-1}v) = (i+1)e_{i-1}(e_{-1}^{g-1}v).$$

进一步,有

$$e_{-1}e_i(e_{-1}^{g-1}v) = \sum_{\nu=0}^{g-1}\binom{g-1}{\nu} e_{-1}^{\nu+1}[e_i, e_{-1}^{(g-1-\nu)}]v,$$
$$= \sum_{\nu=0}^{g-2}\binom{g-1}{\nu} e_{-1}^{\nu+1}[e_i, e_{-1}^{(g-1-\nu)}]v + \sum_{j=0}^{g-1} e_{-1}^j S_j(e_i v);$$

$$(11)\quad \begin{aligned} e_i e_{-1}(e_{-1}^{g-1}v) &= e_i\sum_{j=0}^{g-1} e_{-1}^j S_j v, \\ &= \sum_{j=0}^{g-1}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l} e_{-1}^l [e_i, e_{-1}^{(j-l)}] S_j v; \end{aligned}$$

$$(i+1)e_{i-1}(e_{-1}^{g-1}v) = (i+1)\sum_{\nu=0}^{g-1}\binom{g-1}{\nu} e_{-1}^{\nu}[e_{i-1}, e_{-1}^{(g-1-\nu)}]v.$$

由此出发,通过计算我们得到:

当 $i>1$ 时,有

$$e_{-1}e_i(e_{-1}^{g-1}v) \equiv (g-1)e_{-1}^{g-1}(-1-i)e_{i-1}v + e_{-1}^{g-1}S_{g-1}e_i v \pmod{\mathfrak{m}_{g-1}},$$

$$e_i e_{-1}(e_{-1}^{g-1}v) \equiv e_{-1}^{g-1}e_i S_{g-1}v \pmod{\mathfrak{m}_{g-1}},$$

$$(i+1)e_{i-1}(e_{-1}^{g-1}v) \equiv (i+1)e_{-1}^{g-1}e_{i-1}v \pmod{\mathfrak{m}_{g-1}};$$

当 $i=1$ 时,有

$$e_{-1}e_1(e_{-1}^{g-1}v) \equiv \binom{g-1}{g-3}2e_{-1}^{g-1}v - 2(g-1)e_{-1}^{g-1}e_0 v + e_{-1}^{g-1}S_{g-1}e_1 v \pmod{\mathfrak{m}_{g-1}},$$

$$e_1 e_{-1}(e_{-1}^{g-1}v) \equiv e_{-1}^{g-1}e_1 S_{g-1}v \pmod{\mathfrak{m}_{g-1}},$$

$$2e_0(e_{-1}^{g-1}v) = 2(g-1)(-1)e_{-1}^{g-1}v + 2e_{-1}^{g-1}e_0 v;$$

当 $i=0$ 时,有

$$e_{-1}e_0(e_{-1}^{g-1}v) = (g-1)(-1)\sum_{j=0}^{g-1}e_{-1}^j S_j v + \sum_{j=0}^{g-1}e_{-1}^j S_j(e_0 v),$$

$$e_0 e_{-1}(e_{-1}^{g-1}v) = \sum_{j=0}^{g-1}(-j)e_{-1}^j S_j v + \sum_{j=0}^{g-1}e_{-1}^j e_0 S_j v.$$

因为(9)中的和是直和,将(10)代入上面的结果,我们得到公式:

$$(12)\quad \begin{aligned} &(S_{g-1}e_i - e_i S_{g-1})v = g(i+1)e_{i-1}v \quad (i>1), \\ &(S_{g-1}e_1 - e_1 S_{g-1})v = 2g e_0 v - (g-1)g v, \end{aligned}$$

$$(13)\quad (S_j e_0 - e_0 S_j)v = (g-j)S_j v \quad (j=0,1,\cdots,g-1),$$

引理 3 设 $\mathfrak{M}_0$ 是一个不可约的 L_0-模,其相应的 $r<\frac{p-1}{2}$. 则

$$e_{p-2}\mathfrak{M}_0 = 0.$$

证明:由定理 2,有下面的滤链

$$\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_{r+1} = \cdots = \mathfrak{M}_{p-2},$$

其中 $\mathfrak{M}_i$ 是一个不可约的 L_i-模并且有

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{M}_{p-2} = \{w\}, \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_{i+1}\oplus e_i\mathfrak{M}_{i+1}\oplus\cdots\oplus e_i^{p-1}\mathfrak{M}_{i+1} \quad (i<r).$$

根据假设，$e_{p-2}w=0$，即 $e_{p-2}\mathfrak{M}_r=0$. 假定对于某个固定的 $0\leqslant i<r$ 有 $e_{p-2}\mathfrak{M}_{i+1}=0$.则对于所有的 $u\in\mathfrak{M}_{i+1}$有

$$e_{p-2}e_i^n u=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}e_i^{\nu}[e_{p-2},e_i^{(n-\nu)}]u=0,$$

即有

$$e_{p-2}\mathfrak{M}_i=0,$$

这是因为$[e_{p-2},e_i^{(m)}]$要么是零，要么是 e_{p-2}的一个倍数．通过归纳步骤，最后得到 $e_{p-2}\mathfrak{M}_0=0$.

引理 4 设 L_0 的一个表示：

$$e_i\longmapsto E_i$$

满足等式

(14) $$E_i^p=\epsilon_i E,(i>0),E_0^p-E_0=\epsilon_0 E$$

其中 $\epsilon_{p-2}\neq 0$. 进一步，令 $\mathfrak{B}$ 表示由 E_i 生成的结合代数．则

1.$\mathfrak{B}$ 同构于维数为 p^{p-1}的全矩阵代数．

2. 元素

$$E_0^{\nu_0}E_1^{\nu_1}\cdots E_{p-2}^{\nu_{p-2}}\quad(0\leqslant\nu_i\leqslant p-1)$$

构成 $\mathfrak{B}$ 的一个基．

3. 如果 $\mathfrak{B}$ 中的一个元素 A 具有性质

$$E_iA-AE_i=0(i>0),$$
$$E_0A-AE_0=tA(t\text{ 是一个整数}),$$

那么

$$A=aE_{p-2}^{-\frac{t}{2}}(a\in k).$$

(其中 ν 满足 $0\leqslant\nu\leqslant p-1,\nu\equiv-\frac{t}{2}\bmod p$，它由 $-\frac{t}{2}$唯一确定)

证明：首先，这个给定的表示包含一个 L_0 的不可约表示：$e_i\longmapsto E_i'$，其不变量为 $\epsilon_0,\epsilon_1,\cdots,\epsilon_{p-2}$. 因为 $\epsilon_{p-2}\neq 0$，所以由定理 3 及矩阵定理知 E_i' 生成维数为p^{p-1}的全矩阵代数 $\mathfrak{B}'$. 于是 E_i' 可看作为E_i 的不可约分量．对应 $E_i\longmapsto E_i'$ 给出了 $\mathfrak{B}$ 到 $\mathfrak{B}'$上的一个同态，这里 k 中的元素不变．于是 $\dim\mathfrak{B}\geqslant\dim\mathfrak{B}'$.另一方面，由关系

$$(e_ie_j-e_je_i)v=[e_i,e_j]v(v\in\mathfrak{M}_0)$$

可将 $\mathfrak{B}$ 中元素写成形式

$$\sum a_{\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{p-2}} E_0^{\nu} E_1^{\nu_1} \cdots E_{p-2}^{\nu_{p-2}}$$

其中 $a_{\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{p-2}} \in k$. 由(14)有 $0 \leqslant \nu_i \leqslant p-1$,即 $\dim \mathfrak{B} \leqslant p^{p-1} \leqslant \dim \mathfrak{B}'$. 由此我们得到第一个论断.

现在令

$$A = E_0^n B_n + E_0^{n-1} B_{n-1} + \cdots + B_0,$$

其中 B_i 是某些 $E^{\nu_1} \cdots E_{p-2}{}^{\nu_{p-2}}$的线性组合,并且所有的 B_i 与 E_{p-2}交换. 由条件 $E_{p-2}A = AE_{p-2}$可推出

$$E_0^{n-1} 2nB_n E_{p-2} + E_0^{n-2}(\cdots) + \cdots = 0.$$

于是,我们得到

$$nB_n E_{p-2} = 0.$$

由于 $E_{p-2}^p = \varepsilon_{p-2} E \neq 0$,所以要么 $n = 0$,要么 $B_n = 0$. 因此,A 的表达式中没有含 E_0 的项. 进一步,我们可以假定 A 中没有含 E_j 的项($j < q-3$). 由此得到

$$E_{p-2-(j+1)} A - AE_{p-2-(j+1)} = 0.$$

类似地可证 A 中没有含 E_{j+1}的项. 于是,A 中没有含 E_i($i < p-2$)的项,即有

$$A = aE_{p-2}^{\nu} (a \in k).$$

由等式

$$E_0 aE_{p-2}^{\nu} - aE_{p-2}^{\nu} E_0 = taE_{p-2}^{\nu},$$

我们最后得到 $-2\nu = t$. 因此

$$A = aE_{p-2}^{-\frac{t}{2}} (a \in k).$$

证毕.

我们现在来确定 g. 设 $\mathfrak{M}$ 是一个不可约 L-模,其不变量为 $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_{p-2}$:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0 \oplus \cdots \oplus e_{-1}^{g-1}\mathfrak{M}_0,$$

其中 $\mathfrak{M}_0$ 是一个不可约 L_0-模并且 $g \leqslant p$.

定理 5 若所有的 ε_i 为零. 则 $g = p, p-1$ 或 1;若 $\varepsilon_{p-2} \neq 0$,则 $g = 1$;在其它情形,$g = p$.

证明:首先考虑 $\varepsilon_{p-2} = 0$ 的情形.

根据引理 3 知 $e_{p-2}\mathfrak{M}_0 = 0$. 现假定 $g \neq p$,于是,由此及(12),对于 $v \in$

$\mathfrak{M}_0$,有

(15) $$e_iv=0(i=p-2,p-3,\cdots,1).$$

(16) $$e_0v=\frac{g-1}{2}v.$$

由(16)和(13)导出

(17) $$S_jv=0(j=0,1,\cdots,g-1).$$

因为(17)及

$$e_{-1}^{g}v=e_{-1}(e_{-1}^{g-1}v)=0,$$

所以由(15),(16)与(17)我们得到所有的 ε_i 为零. 这就证明了最后的论断.

现在进一步假定 $g\neq p-1$. 我们将在 $i=g$ 时考察(10)和(11). 由(17),我们得到

$$\sum_{\nu=0}^{g-1}\binom{g-1}{\nu}e_{-1}^{\nu+1}[e_g,e_{-1}^{(g-1-\nu)}]v=(g+1)\sum_{\nu=0}^{g-1}\binom{g-1}{\nu}e_{-1}^{\nu}[e_{g-1},e_{-1}^{(g-1-\nu)}]v.$$

比较上式中不含 e_{-1} 的项,我们得到

$$(-1)^{g-1}(g+1)!\ \ e_0v=0.$$

再由(16)推出 $g=1$. 因此,若 $\varepsilon_{-1}=\varepsilon_0=\cdots=\varepsilon_{p-2}=0$,则 g 只可能为 $p,p-1$ 或 1. 这证明了第一个论断.

现在假定 $\varepsilon_{p-2}\neq0$.

对于 L 的表示 $\mathfrak{M}$,设相应于 e_i 的矩阵为 E_i. 由矩阵定理知,$E_{-1},E_0,\cdots,E_{p-2}$生成全矩阵代数 $\mathfrak{A}$,即 k 上的单正则代数. 由定理 3 知,$\mathfrak{A}$ 的维数为 g^2p^{p-1}. 由引理 4 知,$E_0,E_1,\cdots,E_{p-2}$生成一个单正则代数 $\mathfrak{B}$,其维数为 p^{p-1}. 因为 $E_{p-2}^p=\varepsilon_{p-2}E\neq0$,所以 E 属于 $\mathfrak{B}$. 于是由下面代数理论中的众所周知的定理可导出要证的结果:如果 $\mathfrak{B}$ 是单正则代数 $\mathfrak{A}$ 的一个单正则子代数,并且它们有相同的单位元. 那么 $\mathfrak{A}$ 中所有与 $\mathfrak{B}$ 中元素可换的元素也构成一个单正则代数 $\mathfrak{C}$,并且 $\dim\mathfrak{A}=\dim\mathfrak{B}\cdot\dim\mathfrak{C}$①. 我们希望证明 $g=1$. 为了此目的,首先确定 $\mathfrak{A}$ 的一个基. 对于每个固定的 $1\leqslant n\leqslant p$,定义 $\mathfrak{B}$ 的一个子集 $\mathfrak{J}_n$,它包含在如下等式

(18) $$E_{-1}^{n}B_n+E_{-1}^{n-1}B_{n-1}+\cdots+B_0=0(B_i\in\mathfrak{B})$$

中出现的 E_{-1}^{n}的系数 B_n. 显然,$\mathfrak{J}_n$ 是一个右理想并且有

① 参见 M. Deuring, Algebren, 42–45 页.

(19) $$\mathfrak{J}_1\subseteq\mathfrak{J}_2\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{J}_p.$$

我们断言 B_n 与 $E_iB_n(i\geqslant 0)$属于 $\mathfrak{J}_n$. 事实上，由等式(18)及(3a)，我们有

$$\begin{aligned}0&=E_i(E_{-1}^nB_n+E_{-1}^{n-1}B_{n-1}+\cdots+B_0)\\&=E_{-1}^n(E_iB_n)+E_{-1}^{n-1}(\cdots)+\cdots\quad(i\neq 0),\end{aligned}$$

$$0=(E_0+n)(E_{-1}^nB_n+E_{-1}^{n-1}B_{n-1}+\cdots+B_0)=E_{-1}^n(E_0B_n)+E_{-1}^{n-1}(\cdots)+\cdots,$$

因此，E_iB_n 属于 $\mathfrak{J}_n(i\geqslant 0)$. 进而，$\mathfrak{J}_n$ 是 $\mathfrak{B}$ 的一个双边理想. 因为 $\mathfrak{B}$ 是单的，所以 $\mathfrak{J}_n$ 要么等于 $\mathfrak{B}$，要么为零. 由 $E_{-1}^p=\varepsilon_{-1}E$ 知 $0\neq\mathfrak{J}_p=\mathfrak{B}$. 在(19)中，存在一个极小的 m 使得 $\mathfrak{J}_m=\mathfrak{B}$. 可以证明 E_{-1}满足下面次数最低的方程

(20) $$E_{-1}^m+E_{-1}^{m-1}B'_{m-1}+\cdots+B'_0=0(B'_i\in\mathfrak{B}).$$

进一步，$\mathfrak{A}$ 中的元素可以写成如下形式(与引理 4 比较)：

$$\sum a_{\nu_{-1},\nu_0,\cdots,\nu_{p-2}}E_{-1}^{\nu_{-1}}E_0^{\nu_0}\cdots E_{p-2}^{\nu_{p-2}}\quad(0\leqslant\nu_{-1}\leqslant m-1,0\leqslant\nu_i\leqslant p-1,\forall i\geqslant 0).$$

因为，由引理 4，元素 $E_{-1}^{\nu_0}E_1^{\nu_1}\cdots E_{p-2}^{\nu_{p-2}}$之间没有关系，并且(20)是 E_{-1}所满足的次数最低的方程，所以元素

$$E_{-1}^{\nu-1}E_0^{\nu_0}\cdots E_{p-2}^{\nu_{p-2}}(0\leqslant\nu-1\leqslant m-1,0\leqslant\nu_i\leqslant p-1,\forall i\geqslant 0).$$

构成了 $\mathfrak{A}$ 的一个基并且 $g^2=m$.

现在设 $\mathfrak{C}$ 是 $\mathfrak{A}$ 中所有与 $\mathfrak{B}$ 中元素可交换的元素构成的集合，并且令

$$C=E_{-1}^jA_j+E_{-1}^{j-1}A_{j-1}+\cdots+A_0(j<g^2,A_i\in\mathfrak{B},A_j\neq 0)$$

是 $\mathfrak{C}$ 中的一个元素，由关系 $E_iC-CE_i=0(\forall i\geqslant 0)$得到

$$E_iA_j-A_jE_i=0(\forall i>0),E_0A_j-A_jE_0=jA_j.$$

由引理 4，我们得到 $A_j=aE_{p-2}^{-\frac{j}{2}}$. 于是

(21) $$C=E_{-1}^jaE_{p-2}^{-\frac{j}{2}}+E_{-1}^{j-1}A_{j-1}+\cdots+A_0(A_i\in\mathfrak{B}).$$

对于每个固定的$0\leqslant\nu\leqslant g^2-1$，我们定义 $\mathfrak{C}_\nu$ 是 $\mathfrak{C}$ 中具有下面形式的所有元素构成的集合

$$E_{-1}^\nu D_\nu+E_{-1}^{\nu-1}D_{\nu-1}+\cdots+D_0(D_i\in\mathfrak{B}).$$

于是 $\mathfrak{C}_\nu$ 是 $\mathfrak{C}$ 的一个子模并且

(22) $$k=\mathfrak{C}_0\subseteq\mathfrak{C}_1\subseteq\cdots\subseteq\mathfrak{C}_{g^2-1}=\mathfrak{C}.$$

因为 $\mathfrak{C}$ 中的每个元素都有(21)的特殊形式，所以有

(23) $$\dim\mathfrak{C}_\nu/\mathfrak{C}_{\nu-1}\leqslant 1.$$

假设 g 不等于 1. 由(22)和(23)知 $\mathfrak{C}_{\nu-1}\subset\mathfrak{C}_\nu$. 特别地，$k\subset\mathfrak{C}_1$. 于是在 $\mathfrak{C}$ 中

有一个如下形式的元素

$$C_1=E_{-1}E_{p-2}^{\frac{p-1}{2}}+B(B\in\mathfrak{B}).$$

类似于 Cartan 公式，容易计算得到

$$\begin{aligned}C_1^{\nu}&=(E_{-1}E_{p-2}^{\frac{p-1}{2}})^{\nu}+E_{-1}^{\nu-1}(\cdots)+\cdots\\&=E_{-1}^{\nu}E_{p-2}^{\frac{\nu(p-1)}{2}}+E_{-1}^{\nu-1}(\cdots)+\cdots,\end{aligned}$$

这里 $E_{p-2}^{\frac{\varrho(p-1)}{2}}\neq0$ 因为根据假设 $\epsilon_{p-2}\neq0$. 由(21)知 $1,C_1,C_1^2,\cdots,C_1^{\varrho^2-1}$ 构成 ϱ 的一个基并且 ϱ 是交换的．因为 ϱ 在 k 上是正则的，所以根据上面的代数定理，ϱ^2 必须为 1，即有 $\varrho=1$. 证毕．

由定理 4 和定理 5，我们可以得到下面的结果：

引理 5　若一个不可约 L-模的维数 R 小于 p，则 $R=1$ 或 $p-1$. 而且至多有一个不可约 L-模，其维数为 1 或 $p-1$.

证明：设 $\mathfrak{M}$ 是一个不可约 L-模，其维数 R 小于 p，并设其相应的不变量为 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$. 由定理 4 有

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0\oplus\cdots\oplus e_{-1}^{\varrho-1}\mathfrak{M}_0.$$

其中 $\mathfrak{M}_0$ 是一个不可约 L_0-模，其不变量为 $\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$. 由定理 3，$\mathfrak{M}_0$ 的维数是 p 的幂．另一方面，它又小于 p(因为 $R<p$). 因此 $\mathfrak{M}_0$ 的维数为 1. 再由定理 3 知

$$\varepsilon_{p-2}=0. \tag{24}$$

因为 $\dim\mathfrak{M}_0=1$，所以 $\varrho=R$. 从而

$$\varrho<p. \tag{25}$$

在定理 5 的证明中已证，(24)与(25)推出

$$\varrho=1\text{ 或 }p-1; \tag{26}$$

$$e_iv=0,\ e_0v=\frac{\varrho-1}{2}v,\ e_{-1}^{\varrho}v=0, \tag{27}$$

这里 $\mathfrak{M}_0=\{v\}$. 进一步，(26)导出 $R=1$ 或 $p-1$；(27)导出 $\mathfrak{M}$ 只依赖于 $\varrho=R$. 由此得到第二个论断．证毕．

§4　不可约 L-模的分类

本节我们将确定具有给定不变量 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$ 的 L 的不可约表示的个数及其次数．由上面的结果，我们需要考察不变量为 $\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$ 的不

可约 L_0-模 $\mathfrak{M}_0$. 我们首先证明

定理 6 给定一个不变量为 $\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$的不可约 L_0-模 $\mathfrak{M}_0$ 及 ε_{-1}，存在一个 L-模 $\mathfrak{M}$ 满足

$$
(28)\quad \begin{aligned}&\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0\oplus\cdots\oplus e_{-1}^{p-1}\mathfrak{M}_0\\ &e_{-1}^{p}v=\varepsilon_{-1}v\quad(v\in\mathfrak{M}_0).\end{aligned}
$$

证明：我们可以通过(28)形式地定义 $\mathfrak{M}$ 并且验证它满足表示的定义条件．但这个证明的计算量较大．这里我们将给出另一种构造方法，它是 E.Witt 的一个一般方法的特殊化．

根据 E.Witt 的一个定理存在一个以 $A_{-1}^{\nu_{-1}}A_0^{\nu_0}\cdots A_{p-2}^{\nu_{p-2}}(\nu_i\geq 0)$为基的结合代数 $\mathfrak{A}$ 使得对应 $e_i\longmapsto A_i$ 给出了 L 在 $\mathfrak{A}$ 中的一个忠实的表出①

元素 $A_0^{\nu_0}\cdots A_{p-2}^{\nu_{p-2}}$生成 $\mathfrak{A}$ 的一个子代数 $\mathfrak{B}$，因此我们可将 $\mathfrak{M}_0$ 看成一个 $\mathfrak{B}$-模．在 $\mathfrak{A}$ 中，$A_i(i>-1)$与 A_{-1}之间满足关系

$$A_iA_{-1}^j=\sum_{\nu=0}^{n_{ij}}A_{-1}^{\nu}B_{ij\nu}\,(B_{ij\nu}\in\mathfrak{B}),$$

通过定义

$$\overline{\mathfrak{M}}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{-1}^n\mathfrak{M}_0,$$

$$A_i(A_{-1}^jv)=\sum_{\nu=0}^{n_{ij}}A_{-1}^{\nu}(B_{ij\nu}v)(v\in\mathfrak{M}_0)$$

我们得到一个 $\mathfrak{A}$-模 $\overline{\mathfrak{M}}$. 令 $C=A_{-1}-\varepsilon_{-1}^{\frac{1}{p}}$，则显然有

$$(29)\qquad \sum_{n=0}^{k}A_{-1}^k\mathfrak{M}_0=\sum_{n=0}^{k}C^k\mathfrak{M}_0.$$

特别地

$$\overline{\mathfrak{M}}=\sum_{n=0}^{\infty}C^n\mathfrak{M}_0.$$

利用 Cartan 公式，类似于定理 1 的证明可得 A_{-1}^p，C^p 与 $\mathfrak{A}$ 中的所有元素可换．于是，$C^p\overline{\mathfrak{M}}$ 是 $\overline{\mathfrak{M}}$ 的一个子模．从而

$$\overline{\mathfrak{M}}/C^p\overline{\mathfrak{M}}=\sum_{n=0}^{p-1}C^n\mathfrak{M}_0.$$

是一个 $\mathfrak{A}$-模并且由(29)有

$$\sum_{n=0}^{p-1}C^n\mathfrak{M}_0=\sum_{n=0}^{p-1}A_{-1}^n\mathfrak{M}_0.$$

① E.Witt, Treue Darstellung Liesche Ringe, Crell, Bd.177, 3, 152—155 页．

根据 Witt,在 $\mathfrak{A}$ 中仅有由李环 L 的表示满足的一般关系导出的关系．因此,在上面的等式中可将 A_i 替换为 e_i,即可得到了一个满足性质(28)的 L-模 $\mathfrak{M}$. 证毕．

尽管上面构造的 L-模 $\mathfrak{M}$ 不一定是不可约的,但是它包含一个不可约 L-模,其不变量为 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$. 因此我们有

定理 7 给定 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$,则存在一个以此为不变量的不可约 L-模．

为了进一步的研究,首先回忆一下早先定义的 r:$r\geqslant 0$ 是最小的整数使得当 $i\leqslant 2r+1$ 时,有 $\varepsilon_i=0$. 情形 $0<r<\frac{p-1}{2}$ 较容易处理,而情形 $r=0$, $\frac{p-1}{2}$ 较难．为了简单起见,我们把这些论断表述成如下的主定理．

主定理 1 当 $0<r<\frac{p-1}{2}$ 时,存在惟一的一个 L 的具有给定不变量的不可约表示,其次数为 p^{r+1}.

主定理 2 当 $r=0$ 时,存在 p 个或 $p-1$ 个 L 的具有给定不变量的不可约表示．它们次数不一致,为 $p,p-1$ 或 1.

主定理 3 当 $r=\frac{p-1}{2}$ 时,存在 p 个或 $p-1$ 个 L 的具有给定不变量的不可约表示,其次数为 $p^{\frac{p-1}{2}}$.

我们将在下面给出主定理 1 的证明．而主定理 2 和主定理 3 的证明将在不同情形下给出(主定理 2′ 和主定理 3′).

主定理 1 的证明:设 $0<r<\frac{p-1}{2}$. 由定理 4 和定理 5 知,每个不变量为 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$ 的不可约 L-模满足条件

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0\oplus\cdots\oplus e_{-1}^{p-1}\mathfrak{M}_0,$$
$$e_{-1}^p v=\varepsilon_{-1}v\,(v\in\mathfrak{M}_0)$$

其中 $\mathfrak{M}_0$ 是不变量为 $\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$ 的不可约 L_0-模．根据定理 3,只有惟一的一个这样的 L_0-模．因此至多有一个这样的 L-模 $\mathfrak{M}$,并且其维数为 p^{r+1},这是因为由定理 3, $\mathfrak{M}_0$ 的维数为 p^r. 再由定理 7,我们知道这样的 L-模 $\mathfrak{M}$ 是存在的．证毕．

从现在开始,假设 $r=0$,即有 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_{p-2}=0$.

根据定理 3,存在一个维数为 1,不变量为 $\varepsilon_0,0,\cdots,0$ 的不可约 L_0-模

$\mathfrak{M}_0=\{v\}$,并且

$$e_0v=\delta v,\ e_iv=0(i=1,2,\cdots p-2),$$

其中 δ 是方程 $x^p-x=\varepsilon_0$ 的一个解．在下面的研究中,$\delta=0$ 与 -1 时的两个模起着重要的作用．我们将它们分别记作 $\mathfrak{M}_0^{(0)}$ 与 $\mathfrak{M}_0^{(-1)}$.

引理 6 设 $\mathfrak{M}$ 是定理 6 中在 $r=0$ 的情形下构造的 L-模．若 $\varepsilon_{-1}=\varepsilon_0=0$,并且 $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0^{(0)}$ 或 $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0^{(-1)}$,则 $\mathfrak{M}$ 是可约的．而且,此时 $\mathfrak{M}$ 包含一个维数为 1 或 $p-1$ 的不可约 L-模．在其它情形下,$\mathfrak{M}$ 是不可约的．

证明:首先假设 $\varepsilon_{-1}=\varepsilon_0=0$,并且 $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0^{(-1)}$ 或 $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0^{(0)}$．设 $\mathfrak{M}_0=\{v\}$是由 v 生成的．我们考虑 $\mathfrak{M}$ 中的元素 $v,e_{-1}v,\cdots,e_{-1}^{p-1}v$.

若 $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0^{(-1)}$,则 $e_0v=-v$ 且 $e_iv=0(i>0)$．因为

$$\binom{p-1}{p-i-1}+\binom{p-1}{p-i-2}=\binom{p}{p-i-1}=0,$$

所以对于 $i\geqslant 0$ 有

(30)

$$\begin{aligned}e_i(e_{-1}^{p-1}v)&=\sum_{\nu=0}^{p-1}\binom{p-1}{\nu}e_{-1}^{\nu}[e_i,e_{-1}^{p-1-\nu}]v\\&=\left[\binom{p-1}{p-i-1}+\binom{p-1}{p-i-2}\right](-1)^{i+1}(1+i)!\ e_{-1}^{p-1-i}v=0.\end{aligned}$$

由于 $\varepsilon_{-1}=0$,所以

(31) $$e_{-1}(e_{-1}^{p-1}v)=e_{-1}^{p}v=0.$$

于是 $\mathfrak{M}^{(1)}:=\{e_{-1}^{p-1}v\}$也是 $\mathfrak{M}$ 的一个维数为 1 的子模．这个子模显然是不可约的．

若 $\mathfrak{M}_0=\mathfrak{M}_0^{(0)}$,则 $e_iv=0(i>0)$．于是对 $i\geqslant 0,j\geqslant 1$,有

$$e_i(e_{-1}^{j}v)=\sum_{\nu=0}^{j}\binom{j}{\nu}e_{-1}^{\nu}[e_i,e_{-1}^{(j-\nu)}]v$$

(32)
$$=\begin{cases}0, & 若\ i\geqslant j;\\ \binom{j}{j-i-1}(-1)^{1+i}(1+i)!\ e_{-1}^{j-i}v, & 若\ i<j.\end{cases}$$

因为 $e_{-1}(e_{-1}^{j})v=e_{-1}^{j+1}v(j<p-1)$,$e_{-1}(e_{-1}^{p-1}v)=0$,所以$\{e_{-1}v,e_{-1}^2v,\cdots,e_{-1}^{p-1}v\}:=\mathfrak{M}^{(p-1)}$是 $\mathfrak{M}$ 的维数为 $p-1$ 的子模．假设 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$是可约的．那么它包含上面构造的不可约 L-模 $\mathfrak{M}^{(1)}$．根据引理 5,它是唯一的维数小于 $p-1$ 的不可约 L-模．由(30)和(31)知 $e_i\mathfrak{M}^{(1)}=0,\forall -1\leqslant i\leqslant p-2$,即 $\mathfrak{M}^{(1)}$

是零表出的．从而对于 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$，e_0 必须有一个零特征根．但是由(23)，我们有

$$e_0(e_{-1}^j v) = -je_{-1}^j v(j=1,2,\cdots,p-1),$$

即对于 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$，e_0 的特征根为 $-1,-2,\cdots,-(p-1)$，都不为零．这是一个矛盾．因此 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$ 是不可约的，即证明了第一个论断．注意到 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$ 包含一个元素 $w:=e_{-1}^{p-1}v$，它具有性质

(33) $$e_{-1}w=0,\ e_0w=w.$$

现在设 $\mathfrak{M}$ 是定理6中在情形 $r=0$ 下构造的 L-模，并且 $\mathfrak{M}$ 包含一个不可约真子模 $\mathfrak{M}'$，其不变量为 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,0,\cdots,0$. 因为 $\mathfrak{M}$ 的维数为 p，所以 $\mathfrak{M}'$ 的维数小于 p. 根据引理5，$\mathfrak{M}^{(1)}$ 与 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$ 是所有的维数小于 p 的不可约 L-模．因此 $\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}^{(1)}$ 或 $\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}^{(p-1)}$. 由于 $\mathfrak{M}^{(1)}$ 与 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$ 的不变量为 $0,0,\cdots,0$，所以 $\varepsilon_{-1}=\varepsilon_0=0$. 由此得到

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0\oplus\cdots\oplus e_{-1}^{p-1}\mathfrak{M}_0,$$

其中

$$\mathfrak{M}_0=\{v\},e_iv=0(i>0),e_0v=\alpha v(\alpha^p-\alpha=0),e_{-1}^pv=0.$$

我们考虑 $\mathfrak{M}$ 的一个基 $v,e_{-1}v,\cdots,e_{-1}^{p-1}v$. 容易验证只有 $e_{-1}^{p-1}v$ 的倍数被 e_{-1} 零化，并且

(34) $$e_0(e_{-1}^{p-1}v)=(\alpha-p+1)e_{-1}^{p-1}v.$$

已知 $\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}^{(1)}$ 或 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$. 由于 $\mathfrak{M}^{(1)}$ 是零表出的，而对于 $\mathfrak{M}^{(p-1)}$，(33)成立，所以必有 $e_{-1}^{p-1}v$ 属于 $\mathfrak{M}'$ 且 $e_0(e_{-1}^{p-1}v)=0$ 或 $=e_{-1}^{p-1}v$. 与(34)比较，得到 $\alpha=-1$ 或 0. 即证明了第二个论断．证毕．

由该引理，我们得到在 $r=0$ 情形下，定理6中构造的 L-模几乎全是不可约的．但是 $\mathfrak{M}$ 不由 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,0,\cdots,0$ 惟一确定，因为根据引理3，共有 p 个不同的不变量为 $\varepsilon_0,0,\cdots 0$ 的 L_0-模．现在的问题是它们对应的 p 个 L-模 $\mathfrak{M}$ 是不是也不相同．

引理7 设

$$\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_0\oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0\oplus\cdots\oplus e_{-1}^{p-1}\mathfrak{M}_0,$$
$$\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}_0'\oplus e_{-1}\mathfrak{M}_0'\oplus\cdots\oplus e_{-1}^{p-1}\mathfrak{M}_0'$$

是两个不可约 L-模，它们有相同的不变量 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,0,\cdots,0$，其中 $\mathfrak{M}_0\neq\mathfrak{M}_0'$. 则 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}'$ 等价的充要条件是 $\mathfrak{M}_0$ 与 $\mathfrak{M}_0'$ 中一个等于 $\mathfrak{M}_0^{(-1)}$，而另一个等于 $\mathfrak{M}_0^{(0)}$.

证明：根据假设 $\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}'$ 有相同的不变量 $\varepsilon_0, 0, \cdots, 0$. 根据定理 3，我们得到

$$\mathfrak{M}_0 = \{v\}, e_0 v = \delta v, e_i v = 0 (i > 0);$$

$$\mathfrak{M}_0' = \{v'\}, e_0 v' = \delta' v', e_i v' = 0 (i > 0),$$

其中 $\delta' - \delta = j$（j 是一个整数）. 由 $\mathfrak{M}_0 \not\cong \mathfrak{M}_0'$ 知 $j \neq 0$. 再由 $\mathfrak{M}_0$ 与 $\mathfrak{M}_0'$ 的对称性，我们可假定 $j \neq p-1$. 于是

$$\delta' - \delta = j, 1 \leqslant j \leqslant p-1.$$

于是 $\mathfrak{M}$ 有一个基 $v, e_{-1}v, \cdots, e_{-1}^{p-1}v'$，$\mathfrak{M}'$ 有一个基 $v', e_{-1}v', \cdots, e_{-1}^{p-1}v'$，并且

$$e_0(e_{-1}^k v) = (\delta - k) e_{-1}^k v, \quad e_0(e_{-1}^k v') = (\delta + j - k) e_{-1}^k v'.$$

假定 $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}'$. 于是在这个同构下 v 必被映到 $a e_{-1}^j v'$. 由于 $e_j v = 0$，所以有

$$\begin{aligned} e_j(e_{-1}^j v') &= \sum_{\nu=0}^{j} \binom{j}{\nu} e_{-1}^{\nu} [e_j, e_{-1}^{(j-\nu)}] v' \\ &= (-1-j)(-j) \cdots (-2)(\delta + j) v' \\ &= 0. \end{aligned}$$

由此得到 $\delta + j = \delta' = 0$，即 $\mathfrak{M}_0' = \mathfrak{M}_0^{(0)}$. 若 $\delta \neq -1$，则 $\delta - \delta' = j' \neq -1$. 由 $\mathfrak{M}_0$ 与 $\mathfrak{M}_0'$ 的对称性导出 $\delta = 0$. 这与假设 $\mathfrak{M}_0 \not\cong \mathfrak{M}_0'$ 相矛盾. 因此 $\delta = -1$，即有 $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0^{(-1)}$.

但是，若 $\delta = -1$ 且 $\delta' = 0$，则由(30)有 $e_i(e_{-1}^{p-1} v) = 0 (i \geqslant 0)$，即 $\{e_{-1}^{p-1} v\} = \mathfrak{M}_0^{(0)}$. 因为 $\mathfrak{M}$ 是不可约的并且维数为 p，所以根据定理 4，我们得到

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0^{(0)} \oplus e_{-1} \mathfrak{M}_0^{(0)} \oplus \cdots \oplus e_{-1}^{p-1} \mathfrak{M}_0^{(0)} \cong \mathfrak{M}'.$$

证毕.

主定理 2′ 对于给定的不变量 $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, 0, \cdots, 0$，若 $\varepsilon_0 \neq 0$，则恰好存在 p 个 L 的不可约表示，其次数为 p；若 $\varepsilon_0 = 0, \varepsilon_{-1} \neq 0$，则恰好存在 $p-1$ 个 L 的不可约表示，其次数为 p；若 $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = 0$，则恰好存在 p 个 L 的不可约表示，其中 $p-2$ 个次数为 p，一个次数为 $p-1$，另一个的次数为 1.

证明：首先假定 ε_0 与 ε_{-1} 不全为零. 由定理 4 和定理 5 知，存在一个维数为 p，不变量为 $\varepsilon_{-1}, e_0, 0, \cdots, 0$ 的不可约 L-模，并且满足条件

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 \oplus e_{-1} \mathfrak{M}_0 \oplus \cdots \oplus e_{-1}^{p-1} \mathfrak{M}_0,$$

$$e_{-1}^p v = \varepsilon_{-1} v,$$

其中 $\mathfrak{M}_0=\{v\}$ 是一个不变量为 $\epsilon_0,0,\cdots,0$ 的不可约 L_0-模．于是 $\mathfrak{M}$ 必是定理 6 中构造的一个 L-模．根据定理 3，恰好有 p 个不同的不变量为 $\epsilon_0,0,\cdots,0$ 的 L_0-模 $\mathfrak{M}_0$，所以由引理 6 我们得到 p 个不变量为 $\epsilon_{-1},\epsilon_0,0,\cdots,0$ 的不可约 L-模．再由引理 7 知，若 $\epsilon_0\neq0$，则它们给出了 p 个不同的不可约 L-模；若 $\epsilon_0=0$，则它们给出了 $p-1$ 个不可约 L-模．因此，当 $\epsilon_0\neq0$ 时，我们恰好有 p 个具有给定不变量的不可约 L-模；当 $\epsilon_0=0,\epsilon_{-1}\neq0$ 时，恰好有 $p-1$ 个具有给定不变量的不可约 L-模．

现在设 $\epsilon_0=\epsilon_{-1}=0$．在此情形下，由定理 4 和定理 5 知，不可约 L-模的维数只可能为 $p,p-1$，或 1．由引理 6，存在一个维数分别为 p 与 1 的不可约 L-模．根据引理 5，它们是仅有的维数小于 p 的不可约 L-模．因此，若存在其它的不变量为 $0,0,\cdots,0$ 的不可约 L-模 $\mathfrak{M}$，则 $\mathfrak{M}$ 的维数为 p．同上，$\mathfrak{M}$ 必是定理 6 中构造的一个 L-模，并且定理 6 的构造最多给出 p 个不同的 L-模．由引理 6 知，在此情形下，只有 $p-2$ 个表示是不可约的．再由引理 7，它们是不同的．因此，若 $\epsilon_0=\epsilon_{-1}=0$，则恰好存在 $p-2$ 个维数为 p 的不可约 L-模，一个维数为 $p-1$ 及一个的维数为 1 的不可约 L-模．证毕．

最后，我们考察情形 $r=\dfrac{p-1}{2}$，即 $\epsilon_{p-2}\neq0$．在此情形下，我们需要如下三个引理．首先我们考虑定理 6 中引入的结合代数 $\mathfrak{A}$ 的基元素：

$$A_{-1}^{\nu_{-1}}A_0^{\nu_0}\cdots A_{p-2}^{\nu_{p-2}}(\nu_i\geqslant0),$$

并且 L 是通过 $e_i\longmapsto A_i$ 在 $\mathfrak{A}$ 中忠实表出．

我们称 $\mathfrak{A}$ 中一个基元素的线性组合是一个标准型．若在一个标准型中，只有 $A_i(i\geqslant n$，这里 $n\geqslant-1$ 固定$)$出现，则我们记这个标准型为 $F(A_n,\cdots,A_{p-2})$．显然，$\mathfrak{A}$ 中每一个元素都有唯一确定的标准型．进一步，由运算规则(1)，对于 $m\leqslant n$，可得

$$F_1(A_m,\cdots,A_{p-2})F_2(A_n,\cdots,A_{p-2})=F(A_m,\cdots,A_{p-2}).$$

令

$$A_{p-2}^{\frac{p+1}{2}}=B,A_{p-2}^{\frac{p-1}{2}}=C.$$

引理 8　对于 $x\in k$，在 $\mathfrak{A}$ 中我们有

$$(A_{-1}+xB)^p=A_{-1}^p+B^px^p-\frac{1}{4}A_{p-2}^px^2+[-\frac{1}{2}A_{-1}C+F(A_0,\cdots,A_{p-2})]x.$$

在 $(FB)^p$ 的标准型 $G(A_0,\cdots,A_{p-2})$ 中，项 $aA_{p-2}^{ip}(a\in k,i\geqslant0)$ 不出现．

证明:对于一个特征为 p 的可除代数中的两个元素 a,b 以及一个与 a 和 b 交换的变量 x,我们有恒等式

$$(35)\qquad (a+xb)^p=a^p+b^px^p+\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j}\Lambda_j(a,b)x^j,$$

这里 $\Lambda_j(a,b)$ 是所有形如 $[x_1,[x_2,[\cdots,[x_{p-1},x_p]\cdots]]]$ 的括号运算的和,其中有 j 个因子 b,$p-j$ 个因子 a,并且满足 $x_p=b$(Z91-92). 将该等式应用到 $(A_{-1}+xB)^p$ 上,我们得到

$$(36)\qquad (A_{-1}+xB)^p=A_{-1}^p+B^px^p+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}\Lambda_j(A_{-1},B)x^j.$$

我们希望通过将 Λ_j 化为标准型来计算 $\Lambda_j(A_{-1},B)$. 首先注意到,若 N 具有标准型 $F(A_n,\cdots,A_{p-2})(n>-1)$,则 $[A_{-1},N]$ 有标准型 $F(A_{n-1},\cdots,A_{p-2})$. 这是因为我们有关系

$$A_iA_{-1}=A_{-1}A_i+(-1-i)A_{i-1}(i>-1).$$

现在我们断言,对于 $1\leqslant m\leqslant p-1$,有

$$(37)\quad [A_{-1}^{(m)},B]=\frac{1}{2}(-1)^m m!\ A_{p-2-m}C+F_m(A_{p-2-m+1},\cdots,A_{p-2}).$$

事实上,借助于 Cartan 公式容易通过计算得到

$$[\mathrm{A}_{-1},\mathrm{B}]=-\frac{1}{2}A_{p-3}C+\binom{2}{p-1}A_{p-2}.$$

即在 $m=1$ 时,(37)成立. 现在假定对于一个固定的 $m<p-1$,(37)成立. 于是有

$$[A_{-1}^{(m+1)},B]=\frac{1}{2}(-1)^m m!\ [A_{-1},A_{p-2-m}C]+[A_{-1},F_m(A_{p-2-m+1},\cdots,A_{p-2})].$$

再通过简单的计算,我们得到

$$[A_{-1},A_{p-2-m}C]=-(m+1)A_{p-2-(m+1)}C+\frac{1}{2}A_{p-2-m}A_{p-3}A_{p-2}^{\frac{p-3}{2}}.$$

因为

$$\frac{1}{2}A_{p-2-m}A_{p-3}A_{p-2}^{\frac{p-3}{2}}=H_1(A_{p-2-m},\cdots,A_{p-2})$$

及

$$[A_{-1},F_m(A_{p-2-m+1},\cdots,A_{p-2})]=H_2(A_{p-2-m},\cdots,A_{p-2}),$$

所以有

$$[A_{-1}^{(m+1)},B]=\frac{1}{2}(-1)^{m+1}(m+1)!\ A_{p-2-(m+1)}C+F_{m+1}(A_{p-2-m},$$

$\cdots, A_{p-2})$.

即(37)对于 $m+1$ 是成立的．由归纳法原理,(37)对于所有的 $1 \leqslant m \leqslant p-1$ 成立．由(37)及 $[A_{p-2}, A_i]=0(i>0)$,我们最后得到

(38) $$[B,[A_{-1}^{(m)}, B]]=0 \quad \forall m<p-2,$$

(39) $$[B,[A_{-1}^{(p_1-2)}, B]]=-\frac{1}{2}(p-2)!\ [B, A_0 C]=-\frac{1}{2} A_{p-2}^{p}.$$

现在我们可以计算 $\Lambda_j(A_{-1}, B)$．当 $j>2$ 时,Λ_j 的所有项包含表达式 $[B,[A_{-1}^{(m)}, B]](m<p-2)$ 作为一个因子．根据(38),有

$$\Lambda_j(A_{-1}, B)=0 \quad \forall j>2.$$

当 $j=2$ 时,Λ_2 中只有项 $[B,[A_{-1}^{(p_1-2)}, B]]$ 不含 $[B,[A_{-1}^{(m)}, B]](m<p-2)$ 作为它的因子．由(38)和(39),有

$$\Lambda_2(A_{-1}, B)=-\frac{1}{2} A_{p-2}^{p}.$$

最后得到

$$\Lambda_1(A_{-1}, B)=[A_{-1}^{(p_1-1)}, B].$$

于是,由(37)有

$$\Lambda_1(A_{-1}, B)=-\frac{1}{2} A_{-1} C+F(A_0, \cdots, A_{p-2}).$$

我们将 $\Lambda_j(A_{-1}, B)(j=1,2, \cdots, p-1)$ 代入(36)即可得到第一个论断．

为了证明第二个论断,我们引入一个新的记号．令

$$D=d A_{g_1}^{\nu_{g_1}} A_{g_2}^{\nu_{g_2}} \cdots(-1 \leqslant g_i \leqslant p-2).$$

我们称和 $\sum_i g_i \nu_{g_i}$ 为 D 的权．为此我们注意到,当我们将 D 化为标准型时,其中每一项有相同的权 $g=\sum_i g_i \nu_{g_i}$,这是因为

$$A_i A_j=A_j A_i \text{ 或 }=A_j A_i+(j-i) A_{i+j}.$$

于是 $\Lambda_1(A_{-1}, B)$ 的每一项的权为 $-(p-1)+(p-2) \frac{p+1}{2}$．由此得到 $F(A_0, \cdots, A_{p-2})$ 的每一项的权也为 $-(p-1)+(p-2) \frac{p+1}{2}$．从而,$G(A_0, \cdots, A_{p-2})=(F B)^{p}$ 的每一项的权为

$$p\left[-(p-1)+(p-2) \frac{p+1}{2}+(p-2) \frac{p+1}{2}\right]=p[(p-2)(P+1)-(p-1)].$$

若 G 含有项 $a A_{p-2}^{\varphi}$,则必有 $p-2$ 整除 $(p-2)(p+1)-(p-1)$,这显然是不

可能的．因此，G 不含有项 aA_{p-2}^{ip}．证毕．

现在我们考察 L 的不变量为 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}\neq 0$ 的不可约表示：$e_i\longmapsto E_i$．

在引理 8 中所唯一确定的标准型 $F(A_0,\cdots,A_{p-2})$ 与 $G(A_0,\cdots,A_{p-2})$ 中，通过用 E_i 替代 A_i，我们得到表达式 $F(E_0,\cdots,E_{p-2})$ 与 $G(E_0,\cdots,E_{p-2})$．

引理 9 我们有

$$G(E_0,\cdots,E_{p-2})=P(\varepsilon_0,\varepsilon_1\cdots,\varepsilon_{p-2})E,$$

其中 P 是一个关于 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{p-2}\neq 0$ 的多项式，E 是单位矩阵．而且 $P(0,\cdots,0,1)=0$．

证明：根据 Witt，在 $\mathfrak{A}$ 中仅有由李环 L 的表示满足的一般关系导出的关系．把所有的 A_i 用 E_i 替代，引理 8 中的关系式仍然成立．于是

$$(40)\qquad \begin{aligned}&(E_{-1}+xB)^p\\&=E_{-1}^p+B^px^p-\frac{1}{4}E_{p-2}^px^2+\left[-\frac{1}{2}E_{-1}C+F(E_0,\cdots,E_{p-2})\right]x,\end{aligned}$$

其中

$$B=E_{p-2}^{\frac{p+1}{2}},C=E_{p-2}^{\frac{p-1}{2}}.$$

通过简单计算，对于每个 $x\in k$，对应

$$e_{-1}\longmapsto E_{-1}+xB,e_i\longmapsto E_i(i>-1)$$

定义了一个 L 的不可约表示．由此得到

$$(41)\qquad (E_{-1}+xB)^p=c_xE(c_x\in k).$$

进一步，我们有

$$E_{-1}^p=\varepsilon_{-1}E,B^p=\varepsilon_{p-2}^{\frac{p+1}{2}}E,E_{p-2}^p=\varepsilon_{p-2}E.$$

于是(40)导出

$$(c_x-\varepsilon_{-1}-\varepsilon_{p-2}^{\frac{p+1}{2}}x^p+\frac{1}{4}\varepsilon_{p-2}x^2)E=\left[-\frac{1}{2}E_{-1}C+F(E_0,\cdots,E_{p-2})\right]x.$$

从而，

$$(42)\qquad -\frac{1}{2}E_{-1}C+F(E_0,\cdots,E_{p-2})=cE(c\in k),$$

并且

$$(43)\qquad \frac{2}{\varepsilon_{p-2}}FB=E_{-1}+\frac{2c}{\varepsilon_{p-2}}B.$$

由(41)和(43)，我们得到

(44) $$(FB)^p = G(E_0, \cdots, E_{p-2}) = dE\ (d \in k).$$

依据关系

$$E_0^p - E_0 = \epsilon_0 E,\ E_i^p = \epsilon_i E\ (i > 0),$$

我们可将 G 化为如下的形式

(45) $$G = \sum a_{\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{p-2}} E_0^{\nu_0} E_1^{\nu_1} \cdots E_{p-2}^{\nu_{p-2}} \quad (0 \leqslant \nu_i \leqslant p-1),$$

这里系数是 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-2}$ 的多项式．因为，由引理 4，元素

$$E_0^{\nu_0} E_1^{\nu_1} \cdots E_{p-2}^{\nu_{p-2}} (0 \leqslant \nu_i \leqslant p-1)$$

是线性无关的，所以(44)和(45)导出

$$G(E_0, \cdots, E_{p-2}) = P(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{p-2}) E.$$

由此理 8 知，G 不包含项 $aE_{p-2}^{ip}(i \geqslant 0)$，即 P 不包含项 $a\varepsilon_{p-2}^{ip}(i \geqslant 0)$．因而，$P(0, \cdots, 0, 1) = 0$．证毕．

引理 10 设 Δ 是 L 的一个不可约表示，其不变量为 $\epsilon_{-1}, \varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_{p-2} \neq 0$．则可通过作用 L 的一个自同构 $\sigma_{\varphi(x)}$ 使得对于 L 的一个新的基 $\bar{e}_{-1}, \bar{e}_0, \cdots \bar{e}_{p-2}$，$\Delta$ 的不变量为 $\bar{\varepsilon}_{-1}, 0, \cdots, 0, 1$．

证明：首先注意到，当 $p = 3$ 时，第一章中的多项式的置换群并不是 L 的整个自同构群，但它是一个子群．所以我们仍然可以考虑 L 的自同构 $\psi_{\psi(x)}$．

设对于不可约表示 Δ，L 中元素 a 对应的矩阵为 A．令 c 是方程 $y^{p(p-2)} = \dfrac{1}{\varepsilon_{p-2}}$ 的一个解．作用 L 的自同构 σ_{cx}，我们得到

$$e'_{p-2} = \sigma_{cx}(e_{p-2}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_{p-2}}\right)^{\frac{1}{p}} e_{p-2}, \text{即有 } E'^p_{p-2} = \frac{1}{\varepsilon_{p-2}} E^p_{p-2} = E.$$

所以相应于 L 的新基 $e'_{-1}, e'_0, \cdots, e'_{p-2}$，$\Delta$ 的不变量为 $\varepsilon'_{-1}, \varepsilon'_0, \cdots, \varepsilon'_{p-3}, 1$．若 $\varepsilon'_0 = \cdots = \varepsilon'_{p-2} = 0$，则定理已证．若不然，存在一个 $0 \leqslant j \leqslant p-3$ 使得 $\varepsilon'_j \neq 0$，但是 $\varepsilon'_{j+1} = \cdots = \varepsilon'_{p-3} = 0$．作用 L 的自同构 $\sigma_{\psi(x)}$，这里

$$\psi(x) = x - \frac{1}{2(j+1)} \varepsilon'^{\frac{1}{p}}_j x^{p-1-j},$$

我们得到

$$e''_i = \sigma_{\psi(x)}(e'_i) = e'_i\ (i > j),\ e''_j = \sigma_{\varphi(x)}(e'_j) = e'_j - \varepsilon'^{\frac{1}{p}}_j e'_{p-2}.$$

进一步，有

$$E''^p_i = E'^p_i\ (i > j),\ E''^p_j = (E'_j - \varepsilon'^{\frac{1}{p}}_j E'_{p-2})^p.$$

若 $j>0$，则 E_j' 与 E_{p-2}' 可交换．于是

$$E_j''^p = E_j'^p - \epsilon_j' E = 0.$$

若 $j=0$，则利用等式(35)，我们容易得到

$$E_0''^p = E_0'^p - \epsilon_0'^{\frac{1}{p}} E_{p-2}' - \epsilon_0' E.$$

进而有

$$E_0''^p - E_0'' = E_0'^p - E_0' - \epsilon_0' E = 0.$$

在所有情形下，相应于新基 $e_{-1}'', e_0'', \cdots, e_{p-2}'', \Delta$ 的不变量为 $\epsilon_{-1}'', \epsilon_0'', \cdots, \epsilon_{j-1}'', 0, \cdots, 0, 1$．如此下去，最后得到 L 的一个基 $\bar{e}_{-1}, \bar{e}_0, \bar{e}_{p-2}$，使得相应于这个基，$\Delta$ 的不变量为 $\bar{\epsilon}_{-1}, 0, \cdots, 0, 1$．证毕．

我们称 $\bar{\epsilon}_{-1}, 0, \cdots, 0, 1$ 为不变量 $\epsilon_{-1}, \epsilon_0, \cdots, \epsilon_{p-2}$ 的正规化不变量，这里 $\bar{\epsilon}_{-1}$ 自然依赖于 $\epsilon_{-1}, \epsilon_0, \cdots, \epsilon_{p-2}$，但不由它们惟一确定．而然，$\bar{\epsilon}_{-1}$ 是否为零这个事实由 $\epsilon_{-1}, \epsilon_0, \cdots, \epsilon_{p-2}$ 惟一确定．

现在我们考察 $r=\frac{p-1}{2}$ 的情形．

主定理 3'　设 $r=\frac{p-1}{2}$．则恰好存在 $p-1$(或 p)个 L 的不可约表示．其不变量 $\epsilon_{-1}, \epsilon_0, \cdots, \epsilon_{p-2}$ 可以(或不可以)正规化 $0, 0, \cdots, 0, 1$．而且，它们次数均为 $p^{\frac{p-1}{2}}$．

证明：在此情形下，可直接由定理 3 和定理 5 推出 L 的每个不可约表示的次数都为 $p^{\frac{p-1}{2}}$．我们需要决定 L 的具有给定不变量的 $\epsilon_{-1}, \epsilon_0, \cdots, \epsilon_{p-2}$ 的不可约表示的个数 α．由于 α 在 L 的自同构下是不变的，所以我们可以假定不变量 $\epsilon_{-1}, \epsilon_0, \cdots, \epsilon_{p-2}$ 已正规化为 $\bar{\epsilon}_{-1}, 0, \cdots, 0, 1$.

由定理 7 知存在不可约 L-模 $\mathfrak{M}$，其不变量为 $\bar{\epsilon}_{-1}, 0, \cdots, 0, 1$．我们希望证明有多个这样的 L-模，设 $\mathfrak{M}'$ 是一个与 $\mathfrak{M}$ 有相同的不变量的不可约 L-模．假设 $\mathfrak{M}$ 是通过表示 $e_i \longmapsto E_i$ 给出的．如前，令

$$E_{p-2}^{\frac{p+1}{2}} = B, E_{p-2}^{\frac{p-1}{2}} = C.$$

由定理 5，$\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}'$ 给出了同一个不可约 L_0-模 $\mathfrak{M}_0$，其不变量为 $0, \cdots, 0, 1$．因为根据定理 3，只有惟一的一个这样的 L_0-模，所以 $\mathfrak{M}'$ 如下表出：

$$e_{-1} \longmapsto E_{-1}', e_i \longmapsto E_i (i>-1).$$

通过简单的计算，我们得到

(46)

$$E_i(E'_{-1}-E_{-1})-(E'_{-1}-E_{-1})E_i=0(i>0),$$

$$E_0(E'_{-1}-E_{-1})-(E'_{-1}-E_{-1})E_0=-(E'_{-1}-E_{-1})$$

根据矩阵定理，由 $E_0,E_1,\cdots,E_{p-2}$生成的结合代数是全矩阵代数．于是它包含元素 $E'_{-1}-E_{-1}$. 应用引理4，由(46)我们得到

$$E'_{-1}=E_{-1}+aB(a\in k),$$

于是，a 满足条件

(47) $$(E_{-1}+aB)^p=\bar{\varepsilon}_{-1}E.$$

反过来，易证对于每个满足条件(47)的 a，对应

$$e_{-1}\longmapsto E_{-1}+aB,e_i\longmapsto E_i(i>-1)$$

定义了一个不可约 L-模，其不变量为 $\bar{\varepsilon}_{-1},0,\cdots,0,1$. 并且，$a$ 的不同取值给出了不等价的表示．因此，α 等于满足(47)的 a 的个数．

由引理8，有

(48) $$\begin{aligned}&(E_{-1}+aB)^p\\&=\bar{\varepsilon}_{-1}E+Ea^p-\frac{1}{4}Ea^2+\left[-\frac{1}{2}E_{-1}C+F(E_0,\cdots,E_{p-2})\right]a,\end{aligned}$$

并且由(42)有

(49) $$-\frac{1}{2}E_{-1}C+F(E_0,\cdots,E_{p-2})=cE(c\in k).$$

由(47)，(48)和(49)，我们得到 a 满足方程

(50) $$f(x)=x^p-\frac{1}{4}x^2+cx=0.$$

相反地，若 a 满足方程(50)，则它也满足(47). 所以 α 是f 的不相同的根的个数．由于 $f'=-\frac{x}{2}+c$，所以当 $2c^p+c^2=0$，f 有一个二重根 $x=2c$，而在其它情形下，f 没有重根．因此，若

(51) $$2c^p+c^2=0,$$

则 $\alpha=p-1$. 若 $2c^p+c^2\neq0$，则 $\alpha=p$.

由(49)，我们有

$$2(FB)^p=(E_{-1}+2cB)^p.$$

再由引理9知$(FB)^p=0$. 根据引理8和(49)，有

$$(E_{-1}+2cB)^p=\left(2c^p-\frac{1}{4}(2c)^2+2c^2+\bar{\varepsilon}_{-1}\right)E.$$

于是

(52) $$-\bar{\varepsilon}_{-1}=2c^p+c^2.$$

比较(52)与(51),当 $\bar{\varepsilon}_{-1}=0$ 时,$\alpha=p-1$;当 $\bar{\varepsilon}_{-1}\neq 0$ 时,$\alpha=p$. 这也证明了,$\bar{\varepsilon}_{-1}$是否为零仅依赖于 $\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\cdots,\varepsilon_{p-2}$. 证毕.

综上所述,通过主定理 1,2′和 3′,我们得到了 Witt 李环的所有不可约表示,如在第一节中论及,本文的结果是 Zassehaus 关于幂零李环的结果的类比. 其原因是这两类李环都有一个基 $e_1,e_2,\cdots e_t$,满足对于任意 $1\leqslant i\leqslant t$ 有 $e_i,e_{i+1},\cdots,e_t$ 生成一个子环. 通过本文的讨论,可以想象一般的特征为 p 的域 k 上的单李环的表示理论是很复杂的.

译者:陈江荣,邓邦明

北京师范大学数学系,邮编:100875

附录 5

关于代数的李代数

Claude Chevalley 和段学复

普林斯顿大学数学系

一个 n 维一般线性群 $GL(n,C)$(C 是复数域)的子群 A 称为是代数的，是指 $GL(n,C)$中一个矩阵 σ 属于 A 的条件可以通过 σ 的系数的一组代数方程来表达．显然 A 是一个复李群，它有一个确定的李代数，可以认为是代数李群的李代数．这个问题在某种意义下已为莫勒(Maurer)解决了[①]；在这里我们的目的是从不同的角度重新研究此问题．

我们中的一个人[②]曾定义一个 n 阶矩阵 X 的复型 Y，其意为 X 的所有张量不变量都是 Y 的不变量(这里在定义 X 的张量不变量时，将 X 理解为极小量的符号，而非有限的变换．一向量 v 是不变量是指 $Xv=0$ 而不是 $Xv=v\neq 0$)．设 K 是一特征 0 的域，$g\ell(n,K)$是系数在 K 上的 n 维李代数．$g\ell(n,K)$的一个子代数 g 叫做代数的，如果每个 $X\in g$，X 的复型都属于 g．

若 K 是复数域 C，不难看出由一个矩阵 X 的所有复型张成的李代数是 $GL(n,C)$的包含 X 的单参数群的最小代数子群的李代数．由此立刻得到一个矩阵代数群的李代数是代数的．从下面的考虑中可以看出其逆也是对的．设 g 是一个代数李代数，则可以将 g 中每个元素视为某向量空间 M 中的一个算子，也可视为在 M 上构造的张量空间 $T_{r,s}$($T_{r,s}$是 r 次反变，s 次

---

① Maurer, L. "Zur Theorie der continuerlichen homogenen und linearen Gruppen," *Sitzungsber. d. Bayerischen Akad. Math. Phys. Class*, 24(1894), 297—341.

② Chevalley, C., "A New Kind of Relationship between Matrices," *Amer. J. Math.*, 65(1943), 521—531.

共变的张量空间)的一个算子．现在考虑 $T_{r,s}$ 中所有向量子空间对(P, Q),使得 $Q\subset P$,对所有 $X\in \mathfrak{g}$, $X_{r,s}(P)\subset Q$(其中 $X_{r,s}$是$T_{r,s}$中与X对应的算子). 可以证明,如果一矩阵 X'有 $X'_{r,s}(P)\subset Q$,则 X'属于 $\mathfrak{g}$．很清楚,$X'_{r,s}(P)\subset Q$ 的条件可表为以X'生成的单参数群的矩阵的系数之方程．这样就有**复数域上任一代数李代数都是一个矩阵代数群的李代数**．更进一步,我们的证明方法给出了关于如何写下定义群的有限方程组的一种途径．

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}\ell(n,K)$的任一子代数,在所有包有 $\mathfrak{g}$ 的代数李代数中,存在一个最小者,记作 $\mathfrak{g}^*$. 可以证明 $\mathfrak{g}^*$与 $\mathfrak{g}$ 有相同的导出代数,并且每个 $\mathfrak{g}$ 的理想也是 $\mathfrak{g}^*$的理想．

设 $\mathfrak{g}$ 是任一代数李代数,以 $\mathfrak{h}$记 $\mathfrak{g}$ 的根(即 $\mathfrak{g}$ 的最大可解理想),$\mathfrak{n}$为 $\mathfrak{g}$ 中仅有幂零矩阵组成的最大理想．由莱维(Levi)定理,g 是 h 与一个半单子代数f的直和．可以证明 $\mathfrak{h}$是 $\mathfrak{n}$ 与一个阿贝尔代数 $\mathfrak{a}$的直和,$\mathfrak{a}$中矩阵是半单的,并与 f 中元素可交换．

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}\ell(n,K)$的任一子代数,则可证明其导出代数 $\mathfrak{g}'$是代数的．进而,$\mathfrak{g}'$可"由它的不变量定义",其意义是以 $\mathfrak{g}'$中所有矩阵的公共不变量为自身不变量的矩阵必在 $\mathfrak{g}'$中．将我们的结果特别用于 $\mathfrak{g}\ell(n,K)$中的半单李代数 $\mathfrak{g}$ 上,可知它等于它的导出代数 $\mathfrak{g}'$. 进一步,我们的证明方法可更一般地表明,任一 $\mathfrak{g}\ell(n,K)$的子代数,若它的根仅由幂零矩阵组成,则它必为代数的,并由它的不变量所定义．

如果 A 是域K上的任一代数(结合的或非结合的),A 的微分作成一个李代数,很容易看出它是代数的．

最后,如我们所提及的代数李代数的概念可以很方便地用于扩充半单李代数理论,特别明显的是建立嘉当半单性判别准则和可解李代数的李定理．除了依赖于上面引到的论文[2]中定理3的证明中关于基域的代数闭包以外,用有理证明可以得到嘉当判别准则和李定理．

编者注:此文原题为 On algebraic Lie algebras(与 C. Chevalley 合著),刊于 Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. Vol. 31, No. 7(1945),195—196. 由冯绪宁教授译成中文．

附录6

谈谈近世代数学

段学复

(一)引论和发展的过程

近世代数学(Modern Algebra)和拓扑学(Topology),无疑的是现今算学研究里两个很重要的分目．虽然两者的发达都还不过是近五十年中间的事情,然而两者已经不仅主宰了算学里代数和几何两大部门,而且两者发展的共同点所谓抽象方法以及精神,实在影响了现代算学的全部．当代算学大师 Hermann Weyl 在 1939 年说过:"这个年头,近世代数像魔鬼似的,拓扑学像安琪儿似的,两个一块来搅乱着来争取着每个算学家的心灵．"真是很深刻的观察！现在两者都更有力地打进对方的领域,更可表示两家都是好汉．本刊已有过关于拓扑学的文章,本文试一试素描素描近世代数学的真面目吧！

为着清楚起见,本文分两部分:第一部分偏重在发展的过程,第二部分则是内容的介绍．有些专门名词术语在第二部分有解释,但在第一部分也许已经碰到,初次遇见的人可以先不去管它们含义是怎样的．

近世代数学,自然是对着通常所指的代数学而说的．通常的代数学,粗浅一点来说,就是中学里的代数;因为到了大学以后,除开专门学数理的而外,很少有人再去弄什么劳什子的近世不近世代数了！若就内容来讲,则通常的代数学可以说就是方程式论,尤其是数字方程式解法的讨论,中学代数课程所讲到的大致不外乎此．

人类最先只知道自然数,以后逐渐推广数的概念,而得到零、负数、分数、无理数和虚数等(写的次序并非推广前后!),简单一点儿讲,这些都可以说是为的解数字方程式而得到．依照这个说法,通常所谓代数学的基本定

理,即是"凡系数是复数的一元方程式的根仍是复数",的确是代数学中最基本的定理.也是因为这个道理,有了复数数系,有了这个定理,通常的代数学就到了最后一页了!

我们也可以稍许换一个说法来讲:对于自然数即是正整数,人们早就知道总可以加,总可以乘;可以减,但有时却不行,因此引进来救兵负整数及零,如是就总可以减了,自然数负整数及零合为整数;可以除,但有时却不行,因此引进来正分数,如是总可以除.正负分数及零合为有理数即分数,(当然正负整数及零也看做分数),对于有理数,则加减乘除四个运算都可以无阻碍地做(除数当然不得为零).想求任何有理数的平方根,也就是来解纯二次方程式,有时发生阻碍,于是引入无理数、实数、虚数、复数等概念.引进来一种新的数时,只是很单纯地引了进来,心里还有点怯,因此有负、分、无理和虚等等字样;计算起来,照着自然数的计算来依样画葫芦,就让自然数的运算法则(如结合律、交换律、分配律等等)对于新数也都全对,这样子计算而不出岔子就满意了;渐渐地胆壮了,也就把新数和旧数看成一个样子.

如是数系在一步一步推广着,而运算也一步一步扩大了它们的势力圈.但是一直到了1800年左右的光景,才头一次在代数学里面,对于和这一些通常所称为数的数顶多只有一点点儿像的东西,也来类似地计算一下子.当时发生这种事体的场合可说有两处,都由于要引进今日所谓群的概念而得.一是为着研究系数是整数的二元二次型(即齐次多项式)的数论,Gauss曾经提出过今日所谓有限交换群的结果;二是为着研究一元(代数)方程式是否可以用根式来解的问题,Lagrange,Gauss,Cauchy等人引进来排列群的理论,Abel证明了"五次以上的一般方程绝不可能用根式来解";Galois更真正奠定了有限排列群的理论,并且应用他的理论而得到"一个方程式可以用根式来解的必要且充分的条件",照今日的话讲,即是"这个方程式的Galois群是一个可解群",Group这个字以及群论中间许多重要概念如正常分群及一一同态等,都是Galois所创的.

Gauss的工作可以说更属于近世代数前面的时代,而Abel和Galois这两个遭遇极不幸的天才则实在是近世代数学的开始者.如是近世代数学,可以就是从1800年左右发生的;但由1800年到现在约150年中间,近世代数学发展的过程可以分为三个时期.我们不打算仔细地来写三期历史,只提一提重要发展而已.

第一时期里主要的发展，除开已经说过两个方面之外，还有一个方面，对于促进当时发展影响实在还要大一些．由 1830 年到 1850 年中间，英国一些代数学家，如 Boole，Hamilton，Cayley 等人，由通常的数系出发，推广到一些不完全适合通常运算法则对象，而得今日所谓 Boolean Algebra，不适合乘法交换律的 Hamilton 四元数，不适合乘法结合律的 Cayley 八元数等等．同时，欧洲大陆上 Grassmann 等人也有同方面的工作．

在这以前，代数学中心问题是方程式的解法．有了这第一时期的发展，尤其这最后一方面的工作，形式开始变了！方程式论不再是代数学的全部了！由此渐渐地转向近世代数学今日最主要的问题，所谓代数机构本身的研究．这句话的含义，我们在第二部分里再仔细讲．

第二时期里的发展，接着上面的三方面，分在三个方向同时演进，相互之间没有多少关系以别于 19 世纪末期．

第一方向，是代数数论的成立，主要的是 19 世纪德国学派工作，溯源于 Gauss 关于今日所谓 Gauss 整数的研究（Gauss 整数是实数部分和虚数部分都是整数的复数），而由 Dirichlet，Kummer，Kronecker，Dedekind 及 Hilbert 等人发扬光大．数域、理想数等等重要概念都是这个时期工作的产物．一个未知数的代数函数的理论，也由其推广而得到些结果．

第二是线性代数以及超复数系的研究，重要作家很多，如继承 Hamilton 和 Cayley 工作英国的 Sylvester，Clifford，Peirce 父子，Dickson，Wedderburn 等人，如另树一支的德法的 Dedekind，Frobenius，Molien，Cartan 等．

第三是群论的发展．首先只是关于有限排列群的讨论，上面接承着 Galois 的工作，而以 Jordan 于 1870 年出版的不朽名著为这一方面一个最重要的文献．除排列群而外，Jordan 也得到关于线性群以及群的表示等一些重要结果．Jordan 且开始了无限群的研究，以后由 Lie，Klein，Poincaré 等人发扬光大之．再则自 1880 年左右起，抽象有限群论也开始发展．群的表示理论，以 Frobenius，Burnside，Schur 等人贡献最多，到了 20 世纪初年，已经蔚然成一相当完美学说．

也就是由这 19 世纪的末叶开始，群（以及紧相联系着的不变量）的概念，在几何上在分析上在理论物理上，都发生了重大的影响．深刻研究群以及其他相关的概念，如环、理想数、线性空间、超复数系等，应用于代数学各个部分，这形成近世代数学第三时期的演进，完成了以前三个方面的综合．这一步统一的工作，主要的是近代德国学派功劳：由 Dedekind 及 Hilbert 于

上世纪末叶工作开始;Steinitz 于 1911 年发表的长文,对于代数学抽象化工作贡献极大;其后自 1920 年左右起,以 Noether 及 Artin 和她及他的朋友学生们为中心,近世代数学的发展极为灿烂;工作有成绩的人相当多,姓名不必一一举出. Van der Waerden 根据 Noether 及 Artin 讲课而写成的"Moderne Algebra"一书,综合近世代数学各方面工作为一堂,是学者入门的一部好书.书前有一表格,解释书中各章相互关系,由各章的名称,亦可窥知大概近世代数学在研究一些什么题目.书分两册,于 1930 至 1940 十年之间先后再版,内容颇有增加,这也可以表示近世代数学仍在积极发展中.

自纳粹猖獗执权德国后,不少德国学者相继逃亡,现时代数学的研究中心,俨然到了美国.近几年来,除开已经提到过的一些方面而外,格论以及代数几何学皆有蓬勃的发展,也成了近世代数学两个重要研究对象.至于近世代数学各方面最近发展的情形,则不是本文所能包括的了.

(二)内容的介绍和结论

前面已经讲过,近世代数学的发生,可以说是由于推广数的概念,也可以说是由于扩大可以实施运算的元素的范围.是的,近世代数学家对于可以拿来计算的对象,是不是像普通的数,不太觉得那么有关系,任意抽象的元素,都可以来算一算:这种看法,可说是抽象化运算的元素.他要研究在这些元素上可以做哪一些运算,他不太在乎可以做的运算是不是普通的加减乘除,可是他要注意所做的运算究竟遵守着普通四则所遵守的法则(如有结合律、如有 0 及 1 等等)的那一些个,把所要遵守的那些法则清楚明白说出,叫做公理,就像普通几何学的欧氏公理一样,这样子所做的运算,多多少少,可以说有一点像普通的四则而可叫做代数运算:这样做法,可以说是形式化运算的法则.如是,任意取来一些个抽象的元素,任意给出一个或数个运算,假设两个元素(也可以相同!)用一个运算联结得到的结果仍然是一个元素(没有跳出圈子!),并且假设可以对这些元素实施的这些运算单独地或者联系地遵守着一些个法则,这就形成一种代数的机构.进而由这些假设的法则依照逻辑的方法推理而得到些结果,就是这种代数的机构的性质.所谓近世代数学,简单来说就是研究各种代数的机构的性质(或者组织)的算学.这样子讲,太空洞了,也许不易了解,让我们挑几个代数的机构谈谈吧!

很有一些个不同的代数机构(我们也已经提到过几个),例如:格(Lattice),群(Group),环(Ring),整区(Integral Domain),域(Field),线性空间(Linear Space),超复数系(Hypercomplex System),等等．因为篇幅以及印刷关系,我们不能够把这些机构全都讲到,也不能用很多的公式来严格地讲仔细地讲,我们只预备把其中两个很要紧的机构——群和域——来介绍一下,希望读者对于近世代数学在研究一些什么,可以有个轮廓印象．

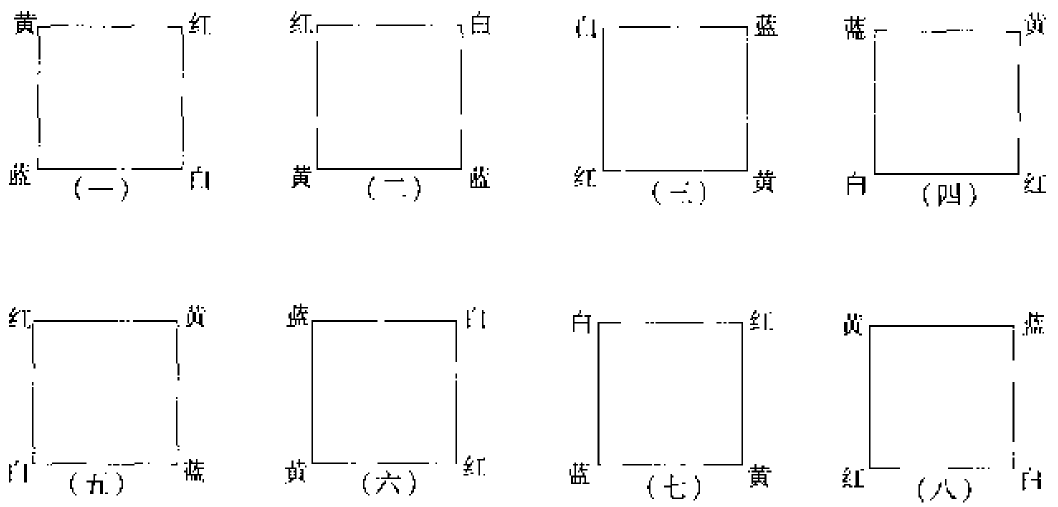
群是近世代数学中最基本的概念之一,我们已经提过群论就是对于几何分析以及理论物理都有重大关系,因此我们愿意解释一下,群是什么?

群的抽象定义,虽然是一直到上世纪之末才完全确定,(排列群的定义,早有了几十年光景,)但是实在很久以前算学研究以及应用中间早就有群的概念隐藏着．譬如说吧:人们为什么更喜欢制造和使用形状比较规则的东西?桌子面为什么总是方的、长方的、圆的、半圆的?窗帘床单和地毯上面的花样,怎样子才好看?大建筑物、屋顶墙上窗上都有浮雕,地上铺有花砖,浮雕砖纹怎就美观?词调曲谱,怎样子就好听悦耳?这些艺术上的问题,也都有群论的背景．(瑞士算学家Speiser所作群论一书是群论一方面标准书籍中有一章讨论图形的对称性,印有很多好看雕琢花样,并有群论解说．他还作有一本书,讨论与算学有关的些艺术问题．)

的确,所谓一个自变换群,即是一些把某个形物(也可以是抽象的!)仍然变换为某个形物的动作的组合,是用来研究这个形物在这些变换中间不受影响的些性质,也就是这个形物的一些对称性质．为得能够说得容易明白一些,我们由一个简单的实例来讨论吧!

拿一块四四方方的正方形薄木板,和一块虽然也有四个边四个角但是形状很不整齐的薄木板来比较比较．我们知道只要一动,那个不整齐的木板就挪开了原来位置,只有不动(不动也是一种动啊!)才不挪动它的位置．(注意一点,若是兜几整圈,则结果和不动一样,也当作不动看!)至于那个正方版呢?很显然的,除开不动而外,首先你可以就着板来转,一下、两下、三下,也就是照逆钟表方向转90度、180度、270度,如是可以把每个角转到其余的三个角,(转五下和转一下结果完全一样,所以就看做一样,如此类推);再者,你可以直着翻,你可以横着翻,也可以这样斜着翻,(两翻和没翻也看做一样,如此类推);总而言之,你共有八个不同的动作,四转(不动当作一转)四翻,使着整个木板看起来好像没有变,但是实际上各角各边的位置也许已经挪了!换句话说,如果这块木板真是四四方方的,并且四个边四个角

看起来都是一模一样，你这样子地动一下，要是你的朋友没有在旁边看着，他不会发现出来的；可是你要是照任何另外的动法来动(看做一样的动法不算！)你的朋友很容易发现出来木板已经挪开原来所占地方了．再者，一个使着整块正方木板所占地方不变动作，自然把四个角(和四个边)的位置调一调，不同动作调法不同，而调法相同的动作，实际对于整个木板作用相同，所以可以当作同一动作来看．如是使这整块木板所占地方不变的八个不同的动作，对于四个角(四边是一样)有着八个不同的调法或者叫做排列．如果把这四个角染上四个不同的颜色，就说是红黄蓝白吧，那么这八个动作可以照对于四个角的排列表示如图所示：



(一)不转动 I 原位置 i　　　(二)转 90 度 R 后位置 r

(三)转 180 度 R'后位置 r'　　(四)转 270 度 R"后位置 r"

(五)直着翻 V 后位置 v　　　(六)横着翻 H 后位置 h

(七)/斜翻 D 后位置 d　　　(八)\斜翻 D'后位置 d'

我们现在讨论这八个使着整块木板所占地方不变的动作所组成集合的性质．为着简便起见，(实则此代数之所以为代数也，由此可抽象可推广，)我们用 G 来代表这集合，用 I，R，R'，R"，V，H，D，D'来代表这些动作，叫做 G 的元素；如果泛指几个元素，则用 X，Y，Z，W 等来代表，如是 X，Y，Z 等所代表的动作，也会不同也会相同；小写字母，表示原来位置经过相当的大写字母的动作以后位置．对于这些元素，我们要做一种运算，用个·号表示，如是 X·Y 就代表先做 X 后做 Y 合起来的动作．有元素，有运算，G 就形成一个代数机构，它有些什么性质呢？第一，X·Y 总与某一个 W 的作用完全一样，用

公式写(1)(见另表).

因为先做X,再做Y,整个木板所占地方当然仍就没变,可是有了一个新的位置,这个位置显然一定和i……d'八个中间的某一个W是一样,于是整个木板只要经过W的动作就可得到先X而后Y的作用,换句话说,W就和X·Y是相同的.(例如先R后D,和H一样)如是G里任意两个元素用运算·依着次序联接结果仍是G里一个元素,为简单起见我们说:G的元素对于·运算有封闭性.第二,G里任意三个元素用运算·联接适合结合律,写公式:(2)(见另表).

这和普通算术加法及乘法结合律完全相似不多加解释了,若有兴趣的话请自己试几个情形.第三,显然E对于任何X都没影响,这个性质可以说是:G有主元素E存在,如是对于G里任意一个元素X,都适合下列公式:(3)(见另表).

第四,不论怎样地动一下,只要倒回来动一下,结果当然是和压根没动一样,这个性质可以说是:对于G里任意一个元素X,都有G里一个相当元素X*存在,叫做X的逆元素,适合下列的公式:(4)(见另表).

G里元素对于·的运算,还有两个性质.甲是,不论你已经怎样动了一下子,不论你还指定要八个位置中的哪一个,我都能够只动一下办到;换句话说,对于先给定的G中任意两个元素,用A和B表示,都有G中一个元素X存在,适合下列的关系:(5)(见另表).乙是,不论你决定只肯怎样子的动,并且还指定要某个位置,我都能够先动一下使着你虽然只那样子的动还能够得到那个位置;换句话说,对于先给定的G中任意两个元素A和B,也都有G中一个元素Y存在,适合下列的关系:(6)(见另表).甲可以说是右边有解的性质,乙则是左边有解的性质.有一点请特别注意,即是(5)里X的和(6)里的Y不一定相同,因为G里元素对于·这运算不一定适合交换律,写公式为(7)(见另表)

例如先R后D得H,先D后R得V.如是G对于·没有交换律的性质,这与普通数的加法和乘法很不同了!

现在我们抽象化我们的元素,形式化我们的运算,就可得到一般群的定义.假设这里有一个集合M,组成M的元素可以是任意的东西,元素的个数(当然至少一个)也可以任意,有限个无穷个都行;再假设有一个任意的运算,仍写作·吧,只要能够知道M中任意两个元素用这个运算联接起来是一个什么东西就行;如果M的元素对于·这运算具有(1)、(2)、(3)、(4)四条性

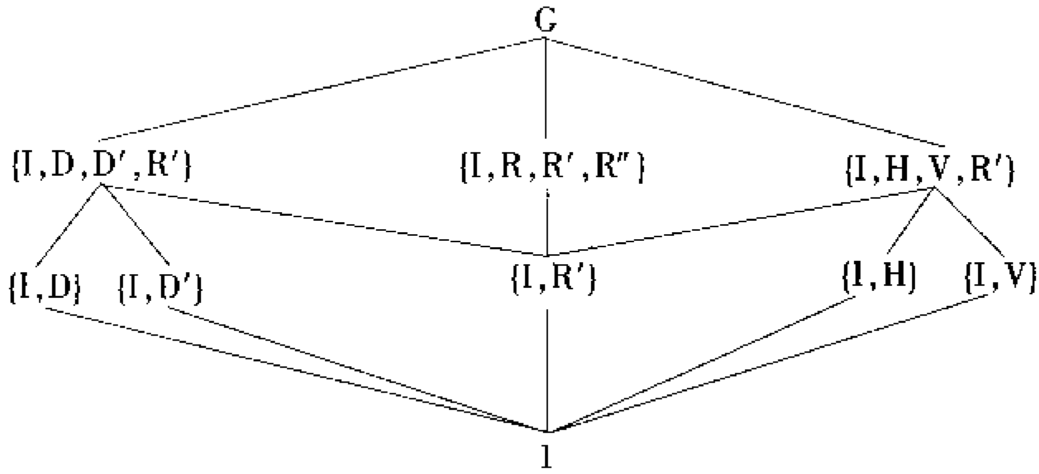
质,式中字母现在当然代表 M 里元素,则 M 称为对于运算·有群的的代数机构,或者简称为群(对运算·而言).

用逻辑的方法,可以证明任何的群都有(5)、(6)两条性质;反转过来,如果 M 的元素对于·的运算具有(1)、(2)、(5)、(6)四条性质,则也必有(3)、(4)两条性质,所以必定是一个群．我们也能证明,任何群的主元素以及任何元素逆元素都是唯一的．

一个群如果适合交换律,则称为交换群或 Abel 群(纪念 Abel).对于一个交换群中任意两个元素 A 和 B 有下列公式:(8)(见另表).

这时(5)、(6)重合,X 即 Y 可看做 B 与 A 用·的逆运算依序连接结果．

我们当然有许多的许多的群．首先,前面的那个 G 自然是一个群．对于同样运算 G 里元素的一部分可能也组成群,如是一个大群可以包括着许多个小群.(例如 I 自己成功一个群,I,V,H,R',也成功一个群,等等)要想研究一个大群的性质,能够知道它所能包括的小群的个数以及相互间的关系当然是很有帮助的一件事,每个群的所有小群组成一个格 Lattice,G 的格如下图:



一个在下面的群如果用一条线或几条线连接到上面的一个群,那么它就是上面的大群的一个小群．

再者,我们也可以不去管那一块薄木板,只管四个角所涂上红黄蓝白颜色,那么八个位置相当八个排法(例如原来的是红黄蓝白,r 则是白红黄蓝等),八个动作则相当八个把一个排法换成另一个排法的排列．其实又何尝要去管真正颜色,就叫做 1234 四个字母当然也可以,这样子我们就得四个数目的八个排列．拿它们做元素,把先一个排列再一个排列结果的排列当

成两者(照着次序)经过运算·的结果,那么我们也得到一个群. 八个动作的群八个排列的群,运算有点仿佛,元素颇不相同. 然而每个动作相当一个排列,不同动作相当不同排列,两个动作运算结果与相当的两个排列结果却又相当,因此如果我们把动作和排列都当作抽象的元素来看,两者所组成的群的机构实在没有什么不同. 这样子我们说:两个群中间有一种(一一)同态关系,或者两群是(一一)同态的. 依着不同方法造出的两个群也许是同态的也许不是,如何决定这件事情也是研究群论应当注意到的.

对于 G 的元素,如果使 R 与 R''对调,又 D 与 D'对调,就得到了一个 G 和 G 自己的(一一)同态或自同态. 当然使所有元素都不变,也是一个自同态. 所有 G 的自同态,组成 G 的自同态群. 任何群都有它的自同态群,研究这个群就是研究原来群本身的对称性质,这和研究方板的群一个样.

平面以及空间任何有规则的形体,都有它们的对称群. 这一方面,五角十二面体(Icosahedron)相当的重要,Klein 曾有专书来讨论,因为它的对称群和一般五次方程式的 Galois 群有相当关系的.

任何个数字 $1,2,\cdots,n$ 共有 $n!$ (即 $1,2,\cdots,n$ 的连乘积)个排列,它们组成 n 级的对称群 S_n. 四次以上一般方程式不能用根式来解的原因,就是因为 n 次一般方程式的 Galois 群是 S_n,而 n 大于四时是一种所谓不可解的群.(五角十二面体的群可以说是 S_5 的一半)这是 Galois 的伟大贡献!

关于群与几何分析以及理论物理间的关系,如 Klein 于 1872 年所建立的 Erlanger Programm,如 Lie 连续群论,如相对论中的 Lorentz 群等等,我们因为篇幅关系没法去谈.

普通的数也有群的机构,例如所有的分数对于加的运算组成一个交换群,所有不是零的分数对于加的运算也组成一个交换群,并且对于加法乘法两个运算有分配律. 至于减及除,则是加和乘的逆运算而已. 由此抽象之形式之,即可得到我们要介绍的第二个机构——域的一般的定义.

现在叫做域的就是:一个由一些个(最少两个)元素组成的集合 F,对于 F 里任意两个元素(也可相同)有两个运算来连接它们,为方便起见就叫做加法乘法也就用 + 及 × 表示,如是所有 F 的元素对于加法组成一个交换群,所有 F 的元素除去对于加法的主元素而外对于乘法也组成一个交换群,并且对于加法及乘法适合分配律. 如果用 a,b,c 代表 F 中任意三个元素(或相同或不同),分配律可以用公式写成:(9)(见另表).

因为乘法有交换律,当然也有:(10)(见另表).

通常用零及 1 来表示对于加法及乘法的主元素．由(9)及(10)很容易证出来:零乘任何 a 与任何 a 乘零结果都是零．

显然域的一般定义,完全由分数数系推广而得到,所以域以前就叫做分区,即是类似分数的集合(Domain of Rationality)．实际发展的过程中,是先推广到数域再到抽象域．

按照定义,所有分数,所有实数,所有复数都各自组成一个域,复数域包括着其他两个小域．一个数域就是复数域里面的任意的域．既然加法乘法结合律交换律及分配律对于所有复数都对,很容易就看出,数域可以简单地定义为:一个包含至少两个复数的复数的集合,其中任意两个数的和差积商(除数不为零)仍然是其中的一个数．(加减乘除都不跳出圈子!)因为显然群的(1)、(2)、(5)、(6)、(7)五条性质对于加法及乘法皆都适合,(减法除法只是二者的逆运算罢了,)由是又可推知(3)、(4)．举例:假如 a 及 b 代表任意的分数,则所有形状像:公式(11)(见另表)的数的两个集合都是域,后面的一面叫做 Gauss 数域．(以前提过的 Gauss 整数自然包括在数域里面．)

不是由一些通常的复数组成的域,可举几个例子如下:

第一,假设 p 是一个大于 1 的质数．用 p 除任意的整数,余数可以作为 0,1,……,p－1 等 p 个数中的一个．如果 a 及 b 是其中任意两个,并且 a,b 的和与积用 p 除剩余数为 c 与 d,我们现在引进两个新的运算,符号定义有如公式(12):(见另表)．

我们能够证明,那 p 个数用这两个新的运算为加与乘组成一个 p 个元素的域．唯一比较难证之点,就是若 a 不等于零,对于任意的 b,都有个 X(也是这 p 个数中间一个)存在,如果 a,X 的积用 p 来除余数恰好是 b. 最简单的证法:a 乘这 p 个数所得结果再用 p 除余数都不相同(因为 p 是质数又不除得尽 a),因此这 p 个余数中间恰好有一个是 b.p 个鸟笼放 p 个鸟,每个笼都没有空着,当然每个笼都恰好有一个鸟,这个简单的道理倒很有用的!当 p 等于 2 时,只有 0,1 两个元素,它们的运算的定义如下:参阅公式(13)(见另表)．

第二,把 x 当作一个符号来看,所有系数在一个域里的 x 的分式(即是两个多项式的商,分母系数不全都是零)对于通常的加与乘两种运算也组成一个域,写一写就知道．

由这几个例子可以看出域所包括到的也和群一样极为广泛,除了分数实数复数三个数域而外还有许多很有意思的域．固然它们三个仍旧是重要

的域,但是却也丢掉一些当年威风.复数数域固然还是真正老牌,但是却不见得别无分号;所谓代数学的基本定理虽然仍很重要,可是不很像近世代数学的基本定理了!

照近世代数学的名词讲,这个定理只是在说:复数数域是一个(对于)代数(运算)封闭的域(Algebraically Closed Field).但是复数数域只是有这个性质的域的一个重要例子而已,重要固然重要,然而只是一个情形.再者,若是只就这个观点来看,即是为着使得方程式有解而推广数系的话,我们很可以不必到复数数域,只要推广到所有代数数的域就可以了.所谓一个代数数,就是一个复数而满足一个系数是有理数的一元方程式.所有的代数数的确组成一个代数封闭的域.代数数域和复数数域有一点重要不同的性质,即是代数数域的元素虽无穷但是可数的,也就是说可以排成第一第二的数下去,而复数数域的元素则是不可数的.当然普通所谓的超越数如 e 和 π 等等是复数,不是代数数.不包括在复数数域里面的代数封闭域不但有而且有无穷,因为对于每个大于一的质数 p 都有,而质数 p 却无穷,关于这点不多谈了!

我们现在简单提提前面说到另外几个重要代数机构.

首先注意分数数系与整数数系的一个大区别:任意两个分数(除数非零)的商永远是个分数,而任意两个整数(除数非零)的商却不一定是整数.要是把域定义中间关于对乘有逆元素那条去掉,就得到所谓交换环.一个交换环如果具有非零元素相乘仍不为零的性质,就叫整区即是类似整数机构.凡整区都可扩张到它的商域,就像整数区与分数域的关系.若把交换环定义中乘法交换律一条也去掉,就得一般的环.这些机构的运算都是所谓内运算,即是两个元素经过运算结果仍是一个元素.但是尚有一种外运算,那就是说有一个元素集和一个运算集,如是运算集中每个运算用到元素集中每个元素仍旧得出元素集中一个元素.简单地说,线性空间就是附带着运算域的交换群(对于向量加法),而超复数系则是个附带着运算域的环(对于加法乘法),当然运算域中运算对于群的加法或者环的加法乘法要适合些条件.此外代数学中还有一些运算,例如复数的绝对值等等,解释起来也要稍加修改.所有这些我们都不仔细讲了.

我们最后要由群域两个机构已有讨论来谈一般代数机构.

我们已经看到,群域两者定义,虽然都很抽象,但是不太复杂,而且成群

成域集合不但很多,并且很多群域都有研究价值．这些事实对于任何重要代数机构都是一样,因为若不如此,不是定义没有给好;就是这个机构根本没有趣味．抽象化元素形式化运算以及推广工作要好像是把一种好酒换成另一种好酒似的,不是把好酒冲淡成高汤!

对于群域以及每种代数机构,我们都可以研究下列一类的问题:一个大机构里都包括着一些那样小的(同种)机构?那些小机构特别重要点?这些小机构间都有什么关系?一个小机构的(一一)自同态群(这是群所以重要的缘故!)是什么?它的小群与小机构有些什么关系?一个大的复杂的机构怎样可以由一些简单点的小机构搭起来?一个机构能够被包在那一些别的机构里面?两个机构虽然造法不同但是抽象地看去是不是(一一)同态?如何决定?这些都是研究每种代数机构性质时所应当注意到的问题．所谓近世代数学,照我们前面说的,就是研究各种代数机构的性质的算学,那么也就是这一类问题的算学了．

附:公式表

(1)$X\cdot Y=W$

(2)$(XY)\cdot Z=X\cdot(YZ)$

(3)$E\cdot X=X=X\cdot E$

(4)$X^*\cdot X=E=X\cdot X^*$

(5)$A\cdot X=B$

(6)$Y\cdot A=B$

(7)$X\cdot Y\neq Y\cdot X$

(8)$A\cdot B=B\cdot A$

(9)$a\times(b+c)=a\times b+a\times c$

(10)$(b+c)\times a=b\times a+c\times a$

(11)$a+b\sqrt{2}$ 或者 $a+b\sqrt{-1}$

(12)$a\oplus b=c$ $a\otimes b=d$

(13)$0\oplus 0=0$ $0\oplus 1=1$ $1\oplus 0=1$ $1\oplus 1=0$

$0\otimes 0=0$ $0\otimes 1=0$ $1\otimes 0=0$ $1\otimes 1=1$

编者注:此文刊于1947年5月31日及6月7日上海《大公报》,刊出时使用的是竖排形式．

附录 7

体的自同构

华罗庚

华罗庚,伊立诺大学数学系 H.S.Vandirer 推荐,1949 年 5 月 8 日

设 K 是一体 . K 到它自身的映射($a \to a^\sigma$)叫做半自同构,如果它满足

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma \tag{1}$$

$$(aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma \tag{2}$$

$$1^\sigma = 1 \tag{3}$$

熟知的半自同构的例子是自同构,它满足$(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$,以及反自同构,它满足$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma$.

一个著名的问题是问除了自同构和反自同构,是否还存在别的半自同构 . 解决这个问题便是本文的目的,即有:

定理 1 每个半自同构必是自同构或反自同构 .

为了证明这个定理,我们需要(1)、(2)和(3)的几个简单推论 .

在(2)中,设 $b = a^{-1}$,则有

$$(a^{-1})^\sigma = (a^\sigma)^{-1} \tag{4}$$

在(2)中,以 $a+b$ 代替 a,以 1 代替 b,则由(3)有

$$(ab)^\sigma + (ba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma + b^\sigma a^\sigma \tag{5}$$

两次用(2),由(4)可得

$$(ba)^\sigma = (ab(ab)^{-1}ba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma((ab)^\sigma)^{-1} b^\sigma a^\sigma \tag{6}$$

从(5)减去(6),得

$$(ab)^\sigma + a^\sigma b^\sigma((ab)^\sigma)^{-1} b^\sigma a^\sigma = a^\sigma b^\sigma + b^\sigma a^\sigma$$

它等价于

$$((ab)^\sigma - a^\sigma b^\sigma)(1 - ((ab)^\sigma)^{-1} b^\sigma a^\sigma) = 0 \tag{7}$$

出此立得 $$(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma \text{ 或 } b^\sigma a^\sigma \tag{8}$$

假设我们有一对元素 a 和 b 使得

$$(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma \neq a^\sigma b^\sigma \tag{9}$$

则对任意 c，我们有

$$(ac)^\sigma = c^\sigma a^\sigma \tag{10}$$

事实上，如若不然，由(8)则有

$$(ac)^\sigma = a^\sigma c^\sigma \neq c^\sigma a^\sigma$$

由(9)和(1)

$$a^\sigma c^\sigma + b^\sigma a^\sigma = (ac)^\sigma + (ab)^\sigma = (a(b+c))^\sigma = a^\sigma(b^\sigma + c^\sigma)$$

$$\text{或} = (b^\sigma + c^\sigma)a^\sigma$$

这两种情形都是不可能的．类似地可以证明，对任一 d， $$(db)^\sigma = b^\sigma d^\sigma \tag{11}$$

现在我们证明 $(dc)^\sigma = c^\sigma d^\sigma$

假定不是这样，则由(8)有

$$(dc)^\sigma = d^\sigma c^\sigma (\neq c^\sigma d^\sigma) \tag{12}$$

则用前面同样推理可得

$$(ac)^\sigma = a^\sigma c^\sigma \tag{13}$$

和

$$(db)^\sigma = d^\sigma b^\sigma \tag{14}$$

现在考虑下面这些元素：

$$b^\sigma a^\sigma + (ac)^\sigma + (db)^\sigma + d^\sigma c^\sigma = ((a+b)(b+c))^\sigma = (a^\sigma + d^\sigma)(b^\sigma + c^\sigma)$$

$$\text{或} = (b^\sigma + c^\sigma)(a^\sigma + d^\sigma)$$

由(10)和(11)可知第一个结论与(9)矛盾，由(13)和(14)可知第二个结论与(12)矛盾．

因此，如果有一对元素 a, b 使得 $(ab)^\sigma = b^\sigma a^\sigma (\neq a^\sigma b^\sigma)$，则对任一对元素 c 和 d 都有 $(cd)^\sigma = d^\sigma c^\sigma$．这便证明了我们的定理．

利用前述定理，我们也解决了体上线射影几何研究的一个问题，也就是：

定理 2 任一个将特征非2的体上的射影直线映到自身，且保持调和关系不变的一对一的映射必是一个由自同构或半自同构诱导出的半线性变换．

这个定理对于四元数代数(安科切亚(Ancochea)[1])证明过，后来对特

征非 2 的可除代数(安科切亚)证明过，一般问题他未解决．

作为下列关于矩阵几何的定理(证明在另文)的一个容易的推论，我们可以将定理 1 扩充到任一个有降链条件的半单环上．

定理 3 两个 $n\times m$ 矩阵 Z 和 W 叫做粘切，是指它们的差 $Z-W$ 的秩是 1. 设 $1<n\leqslant m$，任一个将 $n\times m$ 矩阵映为 $n\times m$ 矩阵并保持粘切关系不变的映射只有形状

$$Z_1=PZ^{\sigma}Q+R \tag{15}$$

其中 $P(=P^{(n)})$ 和 $Q(=Q^{(m)})$ 是非奇异的，$R=R^{(n,m)}$，而 σ 是体的一个自同构．在 $n=m$ 时，除去(15)，我们还有

$$Z_1=PZ'^{\sigma}Q+R \tag{16}$$

其中 σ 是体的反自同构，Z' 是 Z 的转置矩阵．

安科切亚[2]和卡普兰斯基(Kaplansky)[3]用完全不同的方法处理过半自同构问题，他们加了一些限制条件．前者建立了特征非 2 的体上的单代数的对应定理，后者将结果扩充到任意域上的半单代数．二者的方法都来自线性代数的结构理论，因此他们谁都没能把结果扩充到一般情形．

参考文献

[1] Ancochea, G., *J. Math.*, 184, 192—198 (1942).

[2] Ancochea, G., *Annals Math.*, 48, 147—153 (1947).

[3] Kaplansky, I., *Duke Math. J.*, 14, 521—525 (1947).

编者注：此文原载 Proceed of the NAS, Vol. 35, No. 7, pp. 386—389. July, 1949. 由冯绪宁教授译成中文．

附录 8

体的若干性质

华罗庚

华罗庚,伊立诺大学数学系 H.S. Vandirer 推荐,1949 年 7 月 12 日

本文的所有结果都源于下述一个几乎是平凡的不等式,即若 $ab \neq ba$,则

$$a = (b^{-1} - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1))(a^{-1}b^{-1}a - (a-1)^{-1}b^{-1}(a-1))^{-1} \tag{1}$$

在本文结果中有两个有趣的定理,它们分别是卡当(H. Cartan)[1]和迪厄多内(J. Dieudonné)[2]的两个定理的更完美形式.

定理 1 每个体由一个非中心元素及其共轭生成.

设 K 是体,L 是这个共轭集合,由(1)可知,如果 L 中有一个元 b,使 $ab \neq ba$,则 a 属于由 L 生成的体 $K_1$①. 这就是说 $K - K_1$ 与 K_1 是元素相乘可交换的.

假定我们的定理不真,则有一个元素 $a \in K - K_1$,及两个 K_1 中的元素 b, b',使 $bb' \neq b'b$. 因 a 与 ab 属于 $K - K_1$,我们有 $(ab)b' = b'(ab) = ab'b$,于是得出矛盾 $bb' = b'b$. 定理得证.

定理 1 的直接推论即是下列这个有趣结果.

定理 2 体的每个真正规子体必含于其中心之中.

卡当证明这个定理时需要假设体在其中心上的秩是有限的,他的证明比我们这个复杂得多.

更精确的结果可从对子群的详细说明得到.

---

① 原文中误为 K. ——译注

定理 3 每个非为域的体，不存在这样的真子体，它包含体中所有的换位子．

只要证明存在一个换位子不属于中心即足矣．假定 $ab\neq ba$，从(1)变形得：

$$a=(1-(a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)b)(a^{-1}b^{-1}ab-(a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)b)^{-1} \tag{2}$$

我们可知 $a^{-1}b^{-1}ab$ 和 $(a-1)^{-1}b^{-1}(a-1)b$ 两者中至少有一个不属于中心．

作为定理3的系理，我们有

定理 4 如果体的中心包含体的所有换位子，则该体一定是交换的．体中一个元素与体中所有换位子可交换，则该元素必属于中心．

更进一步，作为恒等式

$$a^{-1}c^{-1}ac=a^{-2}(ac^{-1})^2c^2 \tag{3}$$

和定理3的简单推论，我们有

定理 5 每个非域的体，必没有包含体中所有平方元素的真子体．

定理 6 如果体的中心包含体中所有元素的平方，则该体是交换的．体中与体的所有平方元素可交换的元素必属于中心．

利用有限差分论中的一个恒等式：

$$\Delta^{k-1}x^4=k!\ \left(x+\frac{1}{2}(k-1)\right)$$

其中 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)$，$\Delta^i f(x)=\Delta(\Delta^{i-1}f(x))$，我们有

定理 7 每个特征 $\geqslant k$ 的非交换的体，没有包含体中所有 k 次幂元素的子体．

我们记 $a^{-1}b^{-1}ab$ 为 (a,b)，r 阶换位子($r\geqslant 2$)可如下归纳地定义：

$$(a_1,\cdots,a_r)=(a_1,(a_2,\cdots,a_r)) \tag{4}$$

设 C_r 是体中所有 r 阶换位子集合．

定理 8 设 $r\geqslant 2$，每个非交换的体，没有包含体中所有 r 阶换位子的真子体．体中与体的所有 r 阶换位子可交换的元素必属于中心．

记定理中的两个命题分别为 A_r 和 B_r．B_r 由 A_r 立得．定理3和定理5断言 A_2 和 B_2 是真的．我们用归纳法证明这个定理，假定 A_{r-1} 和 B_{r-1} 是真的，设 a 是体中一元素，它不属于中心，由 B_{r-1} 我们有一 C_{r-1} 中的元素 b，使得 $ab\neq ba$．由等式(2)可知 a 属于 C_r 生成的子体中．于是 A_r 得证，定理亦得证．

上面的定理断言,体的乘法群的降中心列,不可能终结于单位.一个几乎是显然的事实上升中心列不可能升.一个比较困难的问题是关于导来列.在另文中我将证明.

定理 9 设 $r\geqslant 1$,每个体由它的所有 r 阶导来群的所有元素所生成.

定理 1 的应用是证明了体上 n 维射影特殊线性群 $PSL_n(K)$[3]的单性.

定理 10 除了 $n=2$ 且 K 只包含 2 或 3 元素外,射影特殊线性群 $PSL_n(K)$是单的.

在 K 是特征非 2 的域或完全域的情形,定理由伯恩赛德(Bornside)—若尔当(Jordan)—迪克森(Dickson)所证(见迪克森[4]第 85 页和范德瓦尔登(Van der-Waerden)[5]第 7 页).不完全域情形是由岩泽健吉(Iwasawa)[6]证明的.对于体的情形证明了 $n>2$ 情况,而当 $n=2$[7]时除外体的中心有 2,3,5 个元素的情况.由于在定理 10 除外的两个情形都不是单的,所以这是关于 $PSL_n(K)$单性问题的最终结果.

由于有了前面已知的结果,从此处开始,我们假定 $n=2$,且体不是交换的.我们来证明等同的事实.

定理 11 $SL_2(K)$的每个正规子群都包含在中心里,除外 K 有 2 个或 3 个元素的情形.

设 A 是 $SL_2(K)$中不属于中心的元素,我们要证明 A 及其共轭元生成 $SL_2(K)$.我们将证明 $SL_2(K)$中有一矩阵 Q,使得 QAQ^{-1}在位置(1,2)有非零元素.事实上,设 $A=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$,如果 $\beta\neq 0$,则 $Q=I$ 就满足要求.如果 $\gamma\neq 0$,则 $Q=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$就可以了.如果 $\beta=\gamma=0$,因为 A 不属于中心,必有一元素 x,使得 $\alpha x\neq x\delta$,则

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}* & -\alpha x+x\delta\\ * & *\end{pmatrix}.$$

我们可以假定 A 及其换位元素生成的子群中,包含一个 $\beta\neq 0$ 的元素.由于

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta^{-1}\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta^{-1}\alpha & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & *\\ * & *\end{pmatrix},$$

我们又可假定该群包含形如 $A=\begin{pmatrix}0 & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$的元素,取

$$B=\begin{pmatrix} -\gamma^{-1}\delta\beta^{-1} & \gamma^{-1} \\ -\gamma\kappa & 0 \end{pmatrix},$$

这里 κ 属于 K 的换位子群，则 B 属于 $SL_2(K)$．我们有

$$A(BA^{-1}B^{-1})=(AB)(BA)^{-1}=\begin{pmatrix} -\beta\gamma\kappa & 0 \\ * & -(\gamma\kappa\beta)^{-1} \end{pmatrix}$$

现在我们要证明可以选择 κ，使得 $-\beta\gamma\kappa$ 不属于中心，因为否则的话，对任何换位子 κ_1 和 κ_2，$(-\beta\gamma\kappa_1)^{-1}(-\beta\gamma\kappa_2)=\kappa_1^{-1}\kappa_2$ 属于中心．这即是说，κ 的换位子属于 K 的中心．由定理 4，K 是域，与假设矛盾．因此，该子群包含一个形如 $C=ABA^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ 的元素，其中 a 不属于中心．在 K 中选取元素 λ，使得 $d\lambda\neq\lambda a$，则子群包含

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d\lambda a^{-1}-\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

我们也可假设子群包有 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$，$c\neq0$.

下面我们去证明该子群包有 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$．当 $c=\pm1$ 时，断言乃平凡．我们假设 $c\neq0$，$c\neq\pm1$．K 的中心添加 c 得到的域 K_1 包含多于 3 个元素．$SL_2(K_1)$ 由任一不在中心里的元素与其共轭元生成．特别地，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ 及其共轭元生成 $SL_2(K_1)$，这样，$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 属于我们考虑的子群．于是该子群对所有 λ 包有

$$\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

若体的特征不是 2，则子群包有所有如下形状元素

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (\lambda+1)^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

这样就得到了定理．

若体的特征是 2，因为

$$\begin{pmatrix} 1 & (\lambda+1)^{-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1+\lambda^{-1})^{-2} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\lambda+1)^{-2} & 1 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}.$$

即该子群对一切 a 包含所有形如

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix}$$

的元素．设 a 是体中任一元素，从

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a^2\lambda^2a^2 + a^5 + a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} (a+1)^2 & 0 \\ 0 & (a+1)^{-2} \end{pmatrix} \times$$

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a+1)^2 & 0 \\ 0 & (a+1)^{-2} \end{pmatrix}^{-1}$；我们推出 $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 属于该子群，因为当跑遍 K 的所有元素时，$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和它的共轭元生成 $SL_2(K)$，定理得证．

使用前面方法可以很容易地得到

定理 12 一般线性群 $GL_n(K)$ 的每个不在中心内的正规子群必包有 $SL_n(K)$，除外 $n=2$ 且 K 有 2 或 3 个元素的情形．

参考文献

[1] Cartan, H., *Ann. Ecole normale superieure*, 64, 59—77(1947), Theorem 4.

[2] Dieudonnè, J., *Bull. Soc. Math. France*, 71, 27—45(1943).

[3] For the definition and properties of $PSL_n(K)$, see Dieudonnè.

[4] Dickson, L. E., *Linear Groups*, Leipzig, 1901.

[5] Van der Waerden, B. L., *Gruppen von linearen Transformationen*, Berlin, 1935, p. 7.

[6] Iwasawa, M., *Proc. Imp. Acad. Japan*, 17, 57(1941).

[7] The author had some difficulty in understanding Dieudonnè's proof. In fact, all the parabolic elements of $PSL_2(K)$ do not form a single conjugate set in $PSL_2(K)$.

编者注：此文原载 Proceed of the NAS, Vol. 35, No. 9, pp. 533—537. September, 1949. 由冯绪宁教授译成中文．

附录9

例外单群的 Poincaré 多项式[①]

严志达 Élie Cartan 推荐

继 É. Cartan 的奠基性工作[②]之后，有好几个研究工作是关于李群的同调环的．Brauer, Pontrjagin 和 Ehresmann 用不同的方法确定了从属于 Killing - Cartan 四大类单群的 Betti 数．另一方面，Ehresmann[③]确定了 É. Cartan 的某些对称空间的 Poincaré 多项式．最近，Hirsch[④]成功地在一个齐性空间和它的群的 Poincaré 多项式之间找到了一个一般的关系[⑤].

设 G 是一个闭李群，g 是一个同阶的子群，又设 $(1+x^{2n_1-1})(1+x^{2n_2-1})\cdots(1+x^{2n_l-1})$ 和 $(1+x^{2k_1-1})\cdots(1+x^{2k_l-1})$ 分别是 G 和 g 的 Poincaré 多项式，这里 l 是阶．依 Hirsch，齐性空间 G/g 的 Poincaré 多项式是

$$\text{(I)}\qquad \frac{(1-x^{2n_1})(1-x^{2n_2})\cdots(1-x^{2n_l})}{(1-x^{2k_1})(1-x^{2k_2})\cdots(1-x^{2k_l})}$$

另一方面，É. Cartan[⑥]确定相应于单李群的所有对称齐性空间已有很久了．这样一个对称空间 M 的 Poincaré 多项式将是由 M 关于特征群 g 的积分不变量所决定的，g 是围绕空间一个点的各向同性群．可以证明当 g 和 M 同阶时，M 的 Betti 数之和是 G 的体积对 g 的体积之商．和 Weyl[⑦]一起我

---

① (巴黎法国科学院)1949 年 2 月 14 日周会议．

② 见 É. Cartan, Selecta, 1939, p. 235—258. 在该论文集中，可以找到有关 Brauer 和 Pontrjagin 的工作的参考文献．

③ Comptes rendus, 208, 1939, p. 321 和 1263; Annals of Math., Ehresmann 告诉我他已得出了所有相应于大类单群的对称空间的同调群．

④ Koszul 告诉了我 Hirsch 近来的结果．

⑤ Chevalley 已经将这一关系用于解决某些例外群的 Poincaré 多项式．

⑥ Ann. Ec. Norm., 44, 1927; Ann. Soc. Pol. Math., 8, 1929.

⑦ Math. Zeitsch., 24, 1925, 以及 E. Witt, Ham. Ab., 1941.

们看到这个商是与 G 相关联的离散群 $S(G)$ 的次数对与 g 相关联的离散群的次数之商．

在所有的这些对称空间中，我们举出两种特别有意思的情形．一种情形是特征群 g 包含一个对一个参数不变的子群时的对称群，另一种情形是特征群 g 包含一个对三个参数不变的子群时的空间．在每种情形中，空间是 $2n$ 维的，群 g 是乘积 $g' \times g_0$，这里 g_0 分别记一个参数和群和一个有三个参数的单群．此外我们知道群 g' 是一个有 n 个复变量的线性群，它们的表示决定了对称空间的 Betti 数．设 $\theta_{[s]}$ 是 g' 相应于 s 阶左对称张量的表示．假设包含在 $\theta_{[s]}$ 中的不可约表示是不等价的，我们就在第一种情形下得出空间的第 2s 个 Betti 数是 $\theta_{[s]}$ 的不可约表示数；而在第二种情形 Betti 数是 $\theta_{[s]}$ 中不可约表示数和 $\theta_{[s+1]}$ 中不可约表示数之差，后者等价于包含在 $\theta_{[s-1]}$ 中的一个表示．

考虑了所有的对称空间，Hirsch 定理和 Betti 数的和，我们能够唯一地决定例外群 F_4 和 E_6 的 Poincaré 多项式．在 E_7 和 E_8 的情形还留有好几个特殊的情形要考虑．我们在这里直接讨论群 $g_1(E_6)$ 和 $g_2(E_7)$ 的表示，这两个群分别是有 27 个复变量的 A 型单群的子群和有 56 个复变量的 C 型单群的子群①．通过计算，我们得到以下结果：设 θ_s 是相应子群 A_{26} 或 C_{28} 的第 s 个主要权②的一个不可约表示．而这个表示 θ_s，在第一种情形，与 $g_1(E_6)$ 相比对于 $s \leqslant 4$ 是不可约的并且对于 $s=5,6$ 可以分解成两个不可约分量；在第二种情形，与 $g_2(E_7)$ 相比，它对于 $s \leqslant 5$ 是不可约的并且对于 $s=6,7$ 可以约简成两个分量．人们从中可以决定某些用第一种考虑无法肯定的空间的 Betti 数．我们得到完整的 Poincaré 多项式的名单：

F_4: $(1+x^3)(1+x^{11})(1+x^{15})(1+x^{23})$

E_6: $(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{11})(1+x^{15})(1+x^{17})(1+x^{23})$

E_7: $(1+x^3)(1+x^{11})(1+x^{15})(1+x^{19})(1+x^{23})(1+x^{27})(1+x^{35})$

E_8: $(1+x^3)(1+x^{15})(1+x^{23})(1+x^{27})(1+x^{35})(1+x^{39})(1+x^{47})(1+x^{59})$

最后，以下的注释看来似乎不是无用的．在一个阶是 l 的例外单群中，没有一个（阶 > 1）从属于四大类的单子群，它在 G 中不与零同调．特别，没

①② 见 Cartan 的论文，Sur la structure des groupes…，（论群的结构）Paris, 1894, 以及 É. Cartan, Selecta, 1939, p. 138 和 154.

有阶为 $l-1(l>2)$ 的子群,它在 G 中不同调于零①.

编者注: 此文原题为 Sur ler polynomes de Poincaré des groupes Simples exceptionnels,刊于 Comptes Rendus, Acad, Sci. Paris, 228 (1949), 628—630. 由姚景齐教授译,许以超教授校.

① É. Cartan, Selecta, 1939, 特别是 p. 255—257, 以及 H. Samelson, Annals of Math., 1941.

附录 10

某些群的线性表示和对称齐性空间的贝蒂数[①]

严志达　Élie Cartan 推荐

在上一个注记[②]中，我们考虑了对称齐性空间，它的特征群包含有一个不变子群，这个子群可能是一个单参数子群[③]，或者是一个三参数的单子群．在每种情形，空间的贝蒂数的计算化为对某些复变量的线性群的表示的研究．问题就是：

设 g' 是 n 个复变量的线性群，$\theta_{[s]}$ 是 g' 的表示，它由所有 s 阶左对称张量构成．要找出 $\theta_{[s]}$ 的所有不可约子表示以及相应的最高权．

设 $z_i(i=1,2,\cdots,m)$[④] 是线性群 g' 的权．表示 $\theta_{[s]}$ 的权是所有形如 $z_{i_1}+z_{i_2}+\cdots+z_{i_s}$ 的权．其中指标 $i_1,\cdots,i_s$ 都不相同．如果将 g' 的权由高向低排好，那么 $z'=z_1+z_2+\cdots+z_s$ 就是 $\theta_{[s]}$ 的所有权中最高的权，即为最高权．考虑形如 $z_1+z_2+\cdots+z_{s-1}+z_{s+l}, z_1+z_2+\cdots+z_{s-2}+z_s+z_{s+l},\cdots$ 的最高权，并且假设我们得到的最高权 z''，它满足下面两条件：

(α) z'' 不是相应于最高权 z' 的子表示的权；

(β) 如果 $\overline{z''}$ 是适合条件 (α) 的一个子表示的最高权，那么 z'' 和 $\overline{z''}$ 相等，或者比 $\overline{z''}$ 高．我们看到 z'' 必定是 $\theta_{[s]}$ 的一个不可约子表示的最高权．

由 H. Weyl[⑤]，我们可以计算这些子表示的维数 N' 和 N''．如果 $\theta_{[s]}$ 的维

① (巴黎法国科学院)1949 年 4 月 20 日周会议．

② Comptes rendus, 228, 1949, p. 628—630.

③ 这一由 É. Cartan 指出的方法[Sur les invariants integraux, etc., (Ann. Soc. Pol. Math., 8, 1929, p. 181—225)]已经应用到所有的对称齐性空间，它的特征群包含一个单参数子群，除非相应是例外群(C. Ehresmann, Annals of Math., 35, 1934, p. 396—443).

④ 原文为 $i=1,2,n$，又：此处 $m\leqslant n$.

⑤ Math, Zeuts., 24, 1925.

数是 N,那么 $N \geqslant N' + N''$. 在 $N = N' + N''$ 时,$\theta_{[s]}$ 只有两个不可约分量. 如果 $N > N' + N''$,用同样的办法,我们可以得到另一个最高权 z''',它满足类似于(α)和(β)的条件. 继续用这一方法,直到 $N = N' + N'' + N''' + \cdots$.

作为一个例子,考虑群 $g' = g_2(E_7)$,这在我们前一个注记中提到过. 权①是 $\pm z_i = \pm(\lambda_i - \lambda_0)$ 和 $\pm z_{ij} = \pm(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_0)$. 既然 g' 是 56 个复变数的辛群的子群,$\theta_{[s]}$ 就可以按照对应辛群的基本权分解,即 $\theta_{[s]} = \theta_{(s)} + \theta_{(s-2)} + \cdots$②.

现在我们从 $\theta_{[s]}$ 转而考虑 $\theta_{(s)}$. 就 g' 而言,当 $s \leqslant 5$ 时它不可约;当 $6 \leqslant s \leqslant 9$ 时,它可约,有两个分量,除了 g' 为一个不可约表示的最高权外,其他最高权分别为

$$\sum_1^5 z_i + z_{67},\ \sum_1^6 z_i + z_{67},\ \sum_1^6 z_i + \sum_5^6 z_{j7} \text{和} \sum_1^6 z_i + \sum_1^6 z_{j7}.$$

在 $s = 10, 11$ 时,它们都有两个权 z' 和 z'',在第一种情形是

$$\sum_1^7 z_i + \sum_4^6 z_{j7},\ \sum_1^6 z_i + \sum_3^6 z_{j7},$$

在第二种情形是

$$\sum_1^7 z_i + \sum_3^6 z_{j7},\ \sum_1^6 z_i + \sum_2^6 z_{j7}.$$

按照所引用的注记③算出了贝蒂数. 我们并不需要知道具体的分解,另一方面,我们也看到条件(β)并不很重要.

最后,我们注意到某些对称空间的贝蒂数的计算比群本身的贝蒂数的计算要简单得多. 但直到现在,人们用直接计算来确定 F_4 和 E_6 型的单群的贝蒂数还未成功. 然而如果我们考虑相应于特征子群的空间④,在第一种情形的 $g_3(C_3) \times g_1(A_1)$ 和在第二种情形的 $g_1(D_5) \times g_0$,我们通过对表示的研究,容易得到两个相应的 Poincaré 多项式:

$$1 + x^4 + 2x^8 + 2x^{12} + 2x^{16} + 2x^{20} + x^{24} + x^{28},$$

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + 2x^8 + 2x^{10} + 2x^{12} + 2x^{14} + 3x^{16} + 2x^{18} + \cdots + x^{32}.$$

---

①② É. Cartan, Bull Soc. Math., 1913, 所用的记号见(1).

③ 本注记的结果所依据的 Hirsch 的公式是作为一个猜想,我在通信中得到的. 它还没有被证明. 但是这里的结果也可以使我们从空间 $E_8/E_7 \times A_1$ 得到 Poincaré 多项式的若干项,即 $1 + x^4 + x^8 + 2x^{12} + 2x^{16} + 3x^{20} + \cdots$.

④ É. Cartan, Ann. Éc. Norm., 44, 1927.

编者注:此文原题为 Les representations lineaires de certains groupes et les nombres de Betti des espaces homogènes symetriques，刊于 Comptes rendus，Acad. Sci. Paris，228 (1949)，1367—1369. 由姚景齐教授译，许以超教授校.

附录 11

格伦瓦尔德定理的一个反例

王湘浩

近来研究中，作者注意到关于代数数域上循环扩张存在性的格伦瓦尔德定理并不总是成立的．同时作者得到了在适当条件下使定理成立的证明．这里，我们给出一个反例，并分析现存的证明．正面的证明将另文发表．

设 K 是一个代数数域 F 上的循环扩张，次数为 l^s，l 是一素数，Ω 是次数为 l 的中间域．假定 F 的有限素除子 $\mathfrak{p}$ 除不尽 l，并在 Ω 中分歧，则它必在 K 上完全分歧．因为任一 mod $\mathfrak{p}$ 同余于 1 的 $\mathfrak{p}$-adic 单位是一个 l^s 次幂，K 在 F 上的导子(conductor)恰为 $\mathfrak{p}$．于是 $\mathfrak{p}$ 的剩余类域的乘法群通过范数剩余符号同态于 K 的伽罗瓦群．由此可知 $N\mathfrak{p}-1$ 被 l^s 除得尽．

现设 F 是有理数域，我们将证明下面命题：

如果 K 是 F 上 2^s 次循环扩域，$s\geq 3$，则素数 2 或在 K 中完全分歧，或至少有两个不同的素因子．

这将为我们给出反例．例如，这命题蕴涵着不存在 F 上的 8 次循环扩张，因为 2-adic 域上的局部扩张是同样次数的(即 8 次)．

为了证明这个命题，考虑 K 中的二次域 $F(\sqrt{m})$．为了论证它，假设命题不对．则 2 在 $F(\sqrt{m})$ 中仍为素数，因此 m 是形如 $8n+5$ 的数．所以一定存在一个素数 $p\mid m$，但 p 不是 $8n+1$ 形状．p 在 Ω 中分歧，我们要注意 $2^s\mid p-1$，$2^s\geq 8$，这是一个矛盾．

据作者所知，在文献中存在着两个格伦瓦尔德定理的证明．即是在《克瑞尔杂志》169 卷上的原始证明和惠普尔斯(G. W. Whaples)在"Duke Mathematical Journal"9 卷上的证明．在后一篇，证明的基础是 467 页上的引理："……因为 α_1 是一 p_0 的 n 次幂，p_0 在 $K_1|k$ 上完全分解，……p_0, p_1 在 K_2

上都完全分解."此处 $K_2=k(\alpha_2^{1/n})$. 这是错的. $\alpha_2^{1/n}$ 在 k 上的不可约方程必然在符号 $\alpha_2^{1/n}$ 添加到 k 之前就固定了,因为 $x^n-\alpha_2=0$ 一般是可约的. 但这样就不能认为 α_2 在 p_0 和 p_1 的 n 次方根满足我们选定的方程. 自然我们可以选择一个作为 α_2 的 n 次方程,例如 p_0 可满足的方程. 但我们不能保证 p_0 和 p_1 在 K_2 中有可分的因子,不能说它们同时是完全分解的.

下面我们检查原始证明. 它是基于在 Mathematische Annalen 107 上的一个主定理. 在 152—153 页上主定理证明的 B 部分用归纳法证明的叙述是暧昧不清的. 我们可以用两个不同的方法说明它(仅在 $l=2$ 的情形下):

(A)设 $\varepsilon_i,\rho_j,\pi_k$ 分别是 $k(i)$ 中的单位元,理想幂次,局部素元,则在 K_{s+2}中

$$\prod \varepsilon_i^{x_i}\rho_j^{y_j}\pi_k^{z_k}i^z \underset{(2^s)}{=} 1$$

蕴涵着 $x_i\equiv y_j\equiv z_k\equiv 0(\bmod 2^s)$.

(B)设 $\varepsilon_i,\rho_j,\pi_k$ 是 k 中相应的东西(不包含 i),则在 K_{s+2}中

$$\prod \varepsilon_i^{x_i}\rho_j^{y_j}\pi_k^{z_k}(-1)^z \underset{(2^s)}{=} 1,$$

而且不是所有 $x_i,y_j,z_k\equiv 0(\bmod 2^s)$蕴涵着在 $k(i)$中有某种关系

(1) $$\prod \varepsilon_i^{x_i}\rho_j^{y_j}\pi_k^{z_k}i^z \underset{(2)}{=} 1,$$

其中 x_i,y_j,z_k 不全为 0.

第一个解释关于 k 没有告诉我们任何事情. 所以我们不去管它. 如果我们认为如(B)中的意思,我们必须证明关系式(1)蕴涵着 $x_i\equiv y_j\equiv z_k\equiv 0(\bmod 2^s)$,而不仅只是在 $k(i)$中

$$\prod \varepsilon_i^{x_i}\rho_j^{y_j}\pi_k^{z_k}(-1)^z \underset{(2)}{=} 1$$

蕴涵着 $x_i\equiv y_j\equiv z_k\equiv 0(\bmod 2^s)$. 然而(1)式是错误的. 设 k 是有理数域,则 ε_i,ρ_j 都不存在. 取 $z_k=z=1,\pi_k=2$,则我们有

$$2\cdot i=(1+i)^2 \underset{(2)}{=} 1.$$

编者注:此文原题为 A Counter-example to Grunwald's Theorem, 刊于 Annals of Mathematics, vol. 49, No. 4, October, 1948, 1008—1009. 由冯绪宁教授译.

附录 12

几度沧桑两鬓斑，桃李天下慰心田

——段学复教授访谈录[①]

丁石孙　袁向东　张祖贵[②]
（北京大学，中国科学院数学研究所，
中国科学院自然科学史研究所）

摘要　本文根据对段学复教授多次访问所录的部分内容撰写。段先生的数学生涯与清华大学、北京大学数学系的发展有极密切的关系。文中反映了段先生的学习、研究情况以及与华罗庚、Brauer，Chevally，Weyl，Artin 等著名学者的交往。

访问者（以下简称"访"）：段先生，今年是您的 80 寿诞。我们想请您谈谈您的身世和经历；几十年风云变幻，您一直跟起伏跌宕的中国现代数学相伴，大家很想知道你对学数学，教数学和研究数学的感受。

段学复（以下简称"段"）：那就从头谈起。我生于 1914 年 7 月 29 日。祖籍在陕西华县。父亲段大贞，是清光绪十年（1884 年）甲申进士，曾在北京等地教书、做官。母亲雷詠霓虽是家庭妇女，但也知书达理。1917 年，我随父母定居北京。10 岁以前只在家里读书，由父亲教我，先认方块字，后又读一些经史书籍，属中国传统的教育。我在这段时间学会了写对联和诗词的一些文字技巧，后来偶尔还试试笔。父亲是个典型的文人，对教书有特殊的感情，我从小就接受了他的"得天下英才而教育之，一乐也"的思想影响，

① 本文写作得到国家自然科学基金支持。

② 作者按姓氏汉语拼音字母序排列。

使我终身以此为乐。

访:10 岁前数学有没有闯入您的生活?

段:有一位堂兄教我算术。他当时在北京学医科,有空就教我,10 岁时我已经学完了初小算术。

访:您什么时候进的正规学校?

段:1924 年。这年秋天我考入了北平高等师范学校(今北京师范大学前身)附属小学的高小一年级。因为父亲和堂兄给我打下了良好的基础,1925 年我又考入了当时很难被录取的北师大附中。可是在 1926 年暑假,我在协和医院检查,发现染上了肺结核。我当时 12 岁,听到得了这种可怕的病,大哭了一场,无奈只好休学一年。经过一年治疗,病算是好了,可身体很瘦弱,这影响了我很多年。

师大附中,引路入算门

访:您是怎么对数学产生兴趣的?

段:休学一年后,我继续在附中念书。初中时成绩不错,但谈不上对哪一方面特别爱好。记得初三时有位语文老师对我很欣赏,因高中要分文理科,临近初中毕业时,他曾有意劝我学文,叫我考高中文科班。不过教务主任王仲超鼓励我学理,结果我报考了理科。1929 年秋,我考入了北师大附中的理科班。

访:人生总有几次转折关头,这时候作的选择很关键。看来,这次选择理科,促成您走入数学的大门。

段:的确如此。当时师大附中教学质量非常好,教材先进,跟国际上比也不逊色。对学生要求极严格,除必修课外,还开设选修课。

我对数学产生兴趣,得力于傅种孙先生的影响,他当时在附中教数学。傅种孙先生学识渊博,在教材编写、数学教学方面在全国堪称首屈一指。我对数学的兴趣,进而选定数学这个攻读的方向,都是在那时形成的。记得高中数学我学得不错,还选修了一年的“微积分初步”。

访:选修课在目前的中学都很少开,您对当时所设选修课总的印象如何?

段:师大附中的选修课制度使我受益匪浅。除“微积分初步”外,我还选修了两年德文(英文是必修的外语),培养了我学习外语的能力,为进一步阅

读和写作打下了较好基础，使我终身受益。

访：显然，中学阶段的学习为您打下了继续深造的基础。在报考大学时，是不是又面临对学校的选择？

段：倒没有。当时师大附中的学生，以报考清华大学为目标，是一种风尚。其原因跟当时清华的性质和水平有关。我在师大附中的那个班有 24 名同学，1932 年毕业时，连我在内有 13 人考进了清华。我报考的是数学系（当时称算学系），除了我爱好数学外，还有个原因，就是身体不太好，我意识到自己动手能力较差，学数学动笔动脑子可能更适合我。

初入清华，名师育高徒

访：清华从留美预备学校正式改为包括文、法、理、工多学科的国立大学大约在 1928 年，20 世纪 30 年代已在全国出类拔萃。您入学时算学系是什么状况？

段：1932 年 9 月我入清华算学系，那时刚满 18 岁。清华算学系建于清华学校时期的 1927 年。我入学时系里有 4 位教授：郑桐荪，熊庆来，孙光远和杨武之。1932—1934 年间熊先生再次赴法研究，由郑、杨两位先后代理系主任。1933 年孙先生到中央大学任教后，系里又先后聘请了赵访熊和曾远荣等先生来校执教。1937 年暑假前，熊先生赴云南大学任校长，继由杨武之先生任系主任。当时除教授外的教员和助教多为熊先生曾主持过的东南大学（校址在南京）算学系和清华算学系的毕业生。

访：您能谈谈熊庆来先生的教学风格吗？

段：熊先生讲课给我留下的最深印象是从容不迫，井井有序，对问题讲得很细很透，法国过去的教学传统在他身上得到了非常好的体现。我记得他上复变函数论课时，为讲清问题，常要拖堂。那时复变函数论课是每周三次各一个小时，实际每次都从上午 11 点讲到下午 1 点。下课后我们几个同班同学只能到当时学校东门外的倪家小铺去吃饭。

考试时熊先生也不在乎时间。一次期中考试，从晚间 7 点开始，直到 10 点半光景我们都做完后，他才收卷，从不催促我们交卷。

访：熊先生对教学真是全心全意的了。

段：熊先生为使我们真正学懂数学，鼓励我们多做题目，训练基本技能。上复变课时我算了不少用留数公式求积分的题，不少难度较大，我觉得做这

些题目本身是一种享受。

访:其他几位教授的讲课有些什么特色呢?

段:杨武之先生是留美博士。他的导师是著名数论专家 L. E. 迪克孙(Dickson),写过三卷本《数论史》(*History of the Theory of Numbers*)。杨先生讲课非常仔细而清晰,每堂课讲新内容前先简要复述已讲过的有关内容;讲课中不时提问,虽然所提问题不难,但要求答者概念十分清楚,促使我们听课时不能走神。我听杨先生的课比较多,有高等代数、近世代数、群论、数论等,对我后来主要从事代数学研究起了重要影响。

访:赵访熊先生的课您听过吗?

段:赵先生 1933 年秋由美国回来时多年轻啊,才 25 岁,就担任了高等分析、高等几何两门全年课程。第二年又开设了微分几何、非欧几何两门学期课,真是才华横溢、英俊潇洒。他讲课用英语,简明扼要,既有高深的理论,又风趣引人。他布置的习题量不很多,但都很有意思。赵先生还一贯重视应用数学。

访:曾远荣先生也给您上过课吗?

段:曾先生是 1934、1935 年间由美国回来到清华任教的,给我们讲过积分论。他讲这门课采用当时他正在从事研究的新兴分支——泛函分析的观点。我们感觉很"现代化"。

访:算学系的学生除数学课外,还有哪些必修和选修课?

段:有大量的其他基础课。清华的教学很严格,使我受益匪浅。首先是外语方面的训练,我念了三门外语课,英语、德语是必修,第三外语法语是选修课。老师对听、说、读、写要求都很严,使我受到很好的训练。在我毕业前夕为写论文选读综合报告时已开始发挥作用,对后来的科研更是很有好处。

我还学了理工科各系学生必修的普通物理,老师是萨本栋先生。萨先生是著名物理学家,又非常重视教学方法,教学效果非常好,我记得每星期一、三、五各上一小时普通物理大课。星期五的课一开始有个小测验,只一道题,比较基本。期末时与中间两次考试、期终考试一起折算合成总分。这样既督促平时的学习,也减轻考试时的紧张。他还要求每周做一次实验,二人一组,要做一下午。

按学校规定,我还听了周培源先生的力学课,赵忠尧先生的中级光学课,余瑞璜先生的中级力学课等。

你可以看出来,清华当时上公共课(大课)的教师,大都是有名的教授。

访：蔡元培先生任北京大学校长时，强调过"文理汇通"。要求文科学生了解一点自然科学知识，理科学生懂一点文史哲。清华的做法怎样？

段：清华那时要求理科学生学一门社会科学，从经济学概论、政治学概论和社会学概论中选，我选了经济学概论。算学系还规定要在逻辑、哲学概论中选修一门，我选了逻辑，由张申府(崧年)先生讲大课。记得张先生有时在班上讲时事，发表一些进步见解，这在当时清华教师中十分少见。

经济学概论和逻辑都有牵涉到数学的内容，我当时学得颇有兴趣，眼界也大大开阔了。

访：您在清华学习期间，有没有接触过国外的数学家？从史料上看，清华当时较注意跟国外的学术交流。

段：与国外数学家的交流，早年中国数学界曾请过著名的英国数学家、哲学家罗素(B. Russell)，那是在 1921 年。邀请世界著名数学家来华讲学在 20 世纪 30 年代中期达到高潮。1935—1936 年维纳(N. Wiener)及 1936 年阿达玛(J. Hadamard)来华，都主要是来清华，而且我有幸听了他们的课。同一时期，北大算学系先后聘请美国的奥斯古德(W. F. Osgood)和德国的施佩纳(E. Sperner)前来讲学。

访：您是否还记得维纳和阿达玛在清华的活动情况？

段：维纳是有名的神童，成名很早。1935 年，清华算学系和电机系联合请他来华讲学。当年夏天他带全家来了中国，进行一年的讲学与研究。他讲课的内容，大都取材于他(包括与别人合作)所著的书和论文，有些甚至是他正在进行的研究工作，非常有启发性。课余时间还和青年师生下"五子棋"，没有一点大教授的架子。我选修了他讲的富氏级数和富氏积分课。

访：阿达玛来华时恐怕年纪很大了，记得他生于 1865 年。

段：阿达玛 1936 年 4 月来清华时已是年逾 70 的古稀老人，但仍很精神。他讲偏微分方程，我旁听了他的课。他的讲学使近代偏微分方程理论开始进入我国；当时在清华任助教的吴新谋先生，于 1937 年赴法后又受他指导；建国后吴先生回国，成为推动我国微分方程事业发展的重要数学家。

对了，记得阿达玛是提前一个月于 1936 年 6 月回法国了，原因是健康不佳，毕竟年岁不饶人。

散步谈天，清华“三剑客”

访：从您初入清华至今已过了60多年，回忆一下当时的生活学习情况，大家都会很感兴趣。是否请您谈谈在清华求学时的生活及交友概况。

段：在清华学习的四年，课程负担总的来说是很重的。但对我来说还不是压得过重。平时，尤其是寒暑假，还有时间读一些数学课外书，看看电影，看看小说（如翻译的苏联小说，茅盾、巴金的小说等）。周末也还有时间进城看望父母，会会朋友。

访：那时您的经济状况怎样？

段：20世纪30年代前期，北平的学生中间流传着这样的说法：“北大老，师大穷，只有清华可通融”。事实上，那时国内经济很不景气。在我那年级300多名同学中，经济宽裕的相对减少了，差一些的增多了，大多数则是一般。到1936年光景，校内开办了清寒学生食堂。我的家庭情况还过得去，但也要量入为出、注意节约。三、四年级，我就参加了评阅入学数学考试卷子等有报酬的工作，也到人家为中学生补习功课。我自己还得过两次奖学金，这样才生活得好了一些。

访：您入清华是在九·一八事变之后，时局的变化对您有什么影响？

段：我在清华的四年，日军又先后占领了山海关、热河，扶植成立了冀东傀儡政权。我记得在校八个学期，由于时局关系竟有六次期考提前或延后举行。在1935年“一二·九”运动前，真是到了“华北之大，已安放不得一张平静的课桌”的关头。

访：您参加“一二·九”运动了吗？

段：本来，我是不过问业务书之外的事情的，但清华四年，我和广大同学一样受到了爱国主义的洗礼，我积极参加了1935年“一二·九”，“一二·一六”两次大游行，以及1936年2月29日晚间在清华新体育馆的集体灭灯静坐，抗议大批军警闯入学校逮捕学生。

访：现在请您谈谈在清华学习期间与华罗庚先生的交往情况。

段：1932年9月中旬，作为新生我到系主任办公室报到时见到了一位年青人，后来知道他就是华先生。到二年级时我和他就相当熟了。他与他中文系的同乡王时凤同学，经常在楼下叫我一起去吃晚饭。饭后散步到清华西门里，然后转回到清华正门，再到科学馆才各自回宿舍。

访：听田方增先生说，你们三位个子都比较高，而且都戴眼镜，又常在一起散步，人称“三剑客”，很有意思，你们散步主要谈些什么？

段：散步中间主要谈论数学。这种谈话对我在学数学方面的影响实在很大。他告诉我，要做法国数学家古尔萨（É. Goursat）编著的《数学分析教程》第 1 卷中的题目，而且每道题都要做。他还举过一个例子，说有道题起先无从下手，后来想出了巧妙的解题办法。他推荐我念英国数学家哈代（G. H. Hardy）的《纯粹数学》，说该书对弄清极限概念很有帮助。华先生还向我推荐德文版的柯瓦列夫斯基（H. Kowalewski）的《微积分引论》。

散步中华先生也谈起时局和学生运动。当时日本侵略东北，华先生的爱国思想对我产生了很好的影响。

访：当时您对华先生印象最深的是什么？

段：华先生当时给我的总印象，就是天才加勤奋。我进清华时，他已有了长女和长子。学期中间他住在清华单身宿舍里，只在寒暑假回金坛住上些天。他当时一心攻读数学，加上年纪轻，身体好，每天钻研数学总有十几个小时。华先生是自学成才的，在清华这段时间里也主要是自学，不过清华给他提供的良好环境和条件也起了很大作用。1932—1933 年间，他没发表数学论文，而是将时间花在开阔数学眼界，提高数学修养方面。20 世纪 30 年代初，他听过熊庆来教授的“复变函数”课，杨武之教授则引导他开始研究数论，这些都促进了他在数学上的成长。

同样重要的是当时清华算学系的风气。华先生是和柯召、王竹溪、许宝騄几位一起学习的。他曾告诉我，他们中间实际上进行着做题竞赛。这样一来，大家都进步得很快。记得维纳在清华讲学时，华先生跟比我高一班的徐贤修合写了一篇关于富氏变换的论文，深得维纳嘉许，就推荐他到英国剑桥大学去找哈代。1936 年他得到中华教育基金会的资助前往英国。

西南联大，初练代数拳

访：您就是 1936 年毕业的吧！

段：我是 1936 年 7 月毕业的。毕业前生了一段病，毕业论文是一篇综述性的学术报告。学校授予我理学士学位，并决定我留校做助教。

访：1937 年抗日战争爆发，清华，北大和南开三所大学南迁，您是怎么去昆明的？

段:1937年"七·七"芦沟桥事变,日本帝国主义悍然入侵北平,挑起全面侵华战争。我于7月29日傍晚跟母亲搭乘平绥火车,经张家口抵山西大同,然后乘汽车到太原,再坐火车经石家庄、郑州才到西安,住在叔父家里。

访:1937年7月29日正是北平沦陷的日子,您真是赶上了最后一班车!

段:是啊!我和母亲乘坐的那班火车正是最后一班受中国人管辖从北平发出的车。再晚一步就落入日本人之手,想出北平就困难了。

在西安我得知清华大学已南迁,准备在长沙与北京大学,南开大学组成"长沙临时大学",定于10月开学。我便赶往长沙,在11月1日长沙临时大学正式上课前,终于到了长沙。在那里给杨武之教授开的课改习题,此外还旁听了好几门课,记得有北大江泽涵教授开的拓扑学,清华周培源教授开的流体力学,南开蒋硕民教授的常微分方程课。

访:长沙临时大学只存在了短短的一个学期,您是不是随校再次南迁昆明的?

段:我并未随学校一起行动。实际上,我在1938年1月由长沙返回西安老家,4月6日在西安跟中学语文教师雷彬如成婚。婚后没几天,我独自一个踏上了赴昆明的漫长路程。

路途虽然艰苦,但不觉得特别难受。一是当时身体还好,二是旅途中先后遇到好几位西南联大的年轻师生,有说有笑。记得1938年4月中旬路过重庆时,正值台儿庄会战告捷,大家都觉得十分高兴。5月下旬我们终于到了昆明。这时长沙临时大学已正式更名为国立西南联合大学,5月4日就开始上课了。我就在西南联合大学——清华大学当助教。

访:当时的生活一定很清苦。

段:记得我跟郑曾同、林家翘、谢毓章同住在一间宿舍里,每人用12个装煤油桶的空木箱搭成床铺和小书桌,就算有了床和工作、看书、备课的地方了。

刚到昆明第一年,物价还比较稳定,我们拿的工资是当时的法币,折合成云南当地的滇币,还算过得去。从1939年下半年起,物价就节节上涨了,一天一个价,甚至几个价,生活更艰苦了。后来我妻子来了昆明,我就搬出单身宿舍,一家住在翠湖旁先生坡的一间民房。

访:生活虽然艰苦,可是西南联大在中国现代科技史上创造了"奇迹"。教学、科研都取得许多成果。您在当时是否也有科研方面的成果?

段:我的科研工作,是通过参加华罗庚先生在西南联大主持的有限群论

讨论班，进而进行合作而开始的。合作的时间不长，大约是从1938年秋起到1939年上半年。因为英庚款公费留学生考试恢复了，我不得不花很多时间准备考试，后来我又准备出国，所以合作告一段落。

访：您和华先生这次合作的课题和成果，您能简单地介绍一下吗？也请谈谈华先生在西南联大的教学活动。

段：华先生是1938年秋由英国回国，受聘为西南联大——清华算学系的教授，成为当时几位年轻的名教授之一，但并没什么架子，还听刘泽荣先生的俄文课。

当时杨武之教授任西南联大理学院算学系主任，他分配我做华先生的助教。华先生于1938—1939学年讲授近世代数，以荷兰数学家范·德·瓦尔登(B.L.Van der Waerden)的《近世代数》第一卷(*Modern Algebra*, *I*)为蓝本，在编写讲义时又作了不少修改。由我刻写讲义、改习题。由于此书跟我过去学的迪克逊的著作有较大不同，因此我随班用心听课，钻研教材，批改习题，收获很大。当时班上的学生有王寿仁、栾汝书、严志达、王宪钟等(记不太清了)，在算学系教师报告会上，华先生讲过“域论八讲”，也有讲稿。王竹溪教授开过“有限群表示论”，也编写了讲义。这些课我都参加了，使我的代数学功底提高到了一个新水平。

访：从学习到研究，讨论班的作用很大。请您稍微详细地谈谈华先生主持的有限群论讨论班。

段：参加华先生这个讨论班的有我、孙本旺、樊畿、徐贤修等人。参加者轮流做报告。华先生要求严格，不管谁没讲清楚都不放过。有一次我讲伯恩赛德(W.Burnside)的一个定理，有个地方报告之前没弄清楚，自然课堂上也通不过。华先生当时没多讲什么，只是说下次再讲吧。我回去后仔细弄通了这个定理，再报告时就讲得很清楚，他非常高兴。这事给我留下很深的印象。

访：讨论班上主要报告哪些内容？

段：讨论班用的素材主要有：査森豪斯(H.Zassenhaus)的《群论教程》(*Lehrbuch der Gruppen Theorie*. I. Teubner, 1937)，斯派塞尔(A.Speiser)的《有限群论》(*Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*，第3版，1937)以及霍尔(P.Hall)刚发表不久的重要论文“关于p-群理论”(A contribution to the theory of groups of prime-power orders. Proc. London. Math. Soc. 36(1934) pp. 29—95)。霍尔的论文为p-群的研究打开了新局面，我和华先生认为有不

少问题值得探讨，可进行合作研究。

访：你们在 p - 群研究中的主要成果是什么？

段：这要从 p - 群的计数定理说起，它是指有关 p - 群的各种类型的子群、元素或子集个数的结果，是 p - 群算术结构的主要研究课题。另一方面，由 p - 群子群个数的条件导出关于 p - 群本身的性质或结构，也是 p - 群算术结构研究的问题。霍尔 1934 年的论文得到了重要的霍尔计数原理，使有关 p - 群计数定理的研究出现了重要突破。

我们合作发表了两篇关于 p - 群的论文，后来又分别各发表了一篇文章。这四篇可合并成一组。我们的工作还是相当引人注目的．首先研究了含有指数为 $p^2(p>2)$ 的循环子群的 p - 群，给出了有关的计数定理，并对这类群做了完全的分类。其结果用英文于 1940 年发表在国内刊物上，包括两篇文章：1. Some Anzahl Theorems for Groups of Prime - Power Orders.（J. Chinese Math. Soc. 2（1940）. pp. 313—319）；2. Determination of the Groups of Odd-Prime-Power p Which Contain a Cyclic Subgroup of Index p^2（Sci. Reports Nat. Tsing - Hua University Ser. A. 4（1940）. pp.（45—51）。

访：在这两篇文章发表后，你们的合作中断了，上面您提到跟您考公费留学生有关，是吗？

段：正在我跟华先生合作研究 p - 群时，英庚款公费留学生的考试恢复了。24 个名额中有数学两个名额。我和当时西南联大几个青年教师都报考了，不得不抽出很多时间准备考试，因此就由华先生一个人继续进行 p - 群方面的研究。他当时得到的结果也用英文写成论文，投到《清华大学理科报告甲辑》杂志，稿子是在 1939—1940 年间投的，但迟延到 1947 年第 4 期才发表。

华先生的这一工作将 p - 群的幂结构与算术结构结合起来研究，这是很有启发性的。在这篇文章中，他还留下一个较难的问题，即奇 p - 群中子群个数的库拉考夫（Кулаков）定理的推广问题，文中提到将由我去研究和解决。

访：您有没有完成这一“任务”？

段：华先生写这篇论文时我正忙于出国考试，紧接着出国，在国外忙于其它学习与研究。直到 1946 年我回北平清华大学任教，在见到华先生论文于 1947 年发表后，才回过头来搞这个问题。由于事隔几年，自己水平和能力的提高，解决起来倒更顺利了。所写论文于 1948 年以英文发表在《清华

理科报告甲辑》上。

访：您对这四篇（1939 年与华先生合作的两篇，华先生 1947 年的一篇及您 1948 年的一篇）文章总的评价如何？

段：这四篇可分成一组。后两篇与当时及其后外国学者（主要是苏联数学家）的工作相比是很有意义的。有关 p - 群子群个数模 p^3 的情形等问题的研究，至今仍在进行。我们文章中蕴含着把 p - 群幂结构与算术结构以至换位子结构联系起来研究的思想，在以后 p - 群理论的进一步发展中显示出重要性。

访：除了合作研究，您跟华先生在西南联大还有哪些交往？

段：华先生当时写了名为《p - 群专论》的一些材料，其中有一些是徐贤修和我写的。当初稿完成后，少部分由我刻写油印，大部分则由我工笔手写。这些材料我一直保存着。经过几十年都没有散失。前几年我把我保存的《p - 群专论》以及另一部《抽象代数讲义》一起交给了华先生，因为后来他手头倒没有这些材料了。

访：您跟华先生的这段合作，可谓中国现代数学史上的一段佳话。

段：就在我们合作的过程中，日本飞机已开始轰炸昆明，而且物价不断高涨。正因为如此，我永远忘不了这段合作。后来华先生不再搞有限群论，而我则从此开始了代数学——群论，尤其是有限群理论和应用的研究，直到现在。

访：您是 1940 年出国的吧。在当时战争年代，与华先生的联系就不多了吧？

段：我 1940 至 1946 年在加拿大、美国留学和短期工作。虽逢战争年代，但仍与在昆明的华先生不时有书信往来。那时华先生住在昆明城外几里的一处黄土坡，生活艰苦。一次他和住在附近的闵嗣鹤先生一起躲警报，不料简易防空沟被震塌，他们都被土埋没了，幸亏及时被人发现才获救。

华先生在这样艰难的环境中，仍开辟了新的科研方向并取得很高成就，我十分钦佩。记得 1943 年下半年，我正在美国普林斯顿大学做博士后研究生，读到了他投寄给《美国数学杂志》（American Journal of Mathematics）的两篇多复变函数的论文，应编辑部的要求，我对论文做了一些小的修改和校对①。

---

① 在华罗庚教授发表的论文的编者按中写道："由于美国与中国之间邮件阻滞，在编者同意下，由华罗庚的朋友段学复与西格尔教授对该文作了一系列微小的修改。"——访问者注

这两篇论文相当有水平，独立于西格尔(C.L.Siegel)教授，给出了四类典型域及其运动群的矩阵表示。

远涉重洋，留学加拿大

访：现在请您谈谈考取英庚款留学的情况。

段：1939 年上半年，第 8 届英庚款留学选拔考试在云南昆明举行。我参加了考试并被录取了。虽是英庚款，却被派去了加拿大，因为加拿大是英联邦内很重要的国家，科技也颇发达。我是第一批公费去加拿大留学的中国人之一。我们这一批英庚款赴加留学生共 24 人，1939 年秋就从昆明动身，因战事几进几出，直到 1940 年秋才到加拿大。

1940 年 9 月抵加后，我进了多伦多大学数学系。一起入多伦多大学的中国同学有：学数学的两人，我和曹隆；学应用数学的三人，郭永怀、钱伟长和林家翘；学生物化学的二人，张龙翔和沈昭文。

访：多伦多大学数学系的情况如何？您的导师是哪位？

段：多伦多大学是加拿大最大、成立最早的高等学府。数学系是该校较大的系，人也较多。其中有一些高水平的数学家。我的导师是 R.布饶尔(R.Brauer)，是位犹太人，当时他的工作已十分出色，成就比系里其他教授多，可是在数学系的教授中，他当时却排在最后一位。系里还有一些相当好的教授，如考克斯特(H.S.M.Coxeter)，鲁宾逊(G.B.Robinson)，后来的工作都很出色。

访：您跟随布饶尔教授从事哪方面的学习与研究？

段：布饶尔的研究领域是有限群的模表示论。群论是 19 世纪 20 年代兴起的重要数学领域，它使代数学发生了深刻变化，自 19 世纪以来一直是数学尤其是代数学中的核心之一。有限群的模表示论研究有限群在特征为素数 p 的域上的表示。布饶尔从 1935 年起开始这方面的研究，是这一领域的奠基人和开拓者。我到多伦多大学时，这一领域正处于起步阶段，我也立即开始跟布饶尔从事这方面的研究。

访：能在一个新的，重要的研究领域刚开创时，就拜开创者为师一同开发新领域，确实十分难得。您从事过的 p - 群研究，对进入新领域有无帮助？

段：p - 群可以认为是有限群论中一个多少是独立的分支。我跟华先

生在这方面的研究，当然也为我跟布饶尔研究有限群论打下了基础。我进多伦多大学跟布饶尔教授见面后不久，曾把我跟华先生一起做的 p - 群的论文送给他看，布饶尔很高兴。不久他又给我出了杰宁斯(Jennings)刚做出来不久的一个问题。布饶尔显然是想试试我，我做出来了，因此我一开始给他的印象很不错。

访：您在多伦多大学呆了多长时间，后来怎么转到普林斯顿的？

段：在多伦多大学，我主要参加布饶尔关于有限群模表示的讨论班，讨论班只有很少几个人，主要对某些阶的有限群进行研究，后来布饶尔去了美国的普林斯顿，我在 1941 年获硕士学位后也跟着去了普林斯顿，在那里攻读博士学位。

普林斯顿，教授难学子

访：普林斯顿在当时有世界数学中心之称，到那里读博士一定很兴奋。

段：记得刚到普林斯顿大学数学系报到时，系里主持工作的教授就要对我来一次考试。

访：是例行公事还是别有原因？

段：当时在普林斯顿大学有不少中国学生，相当多是勤奋刻苦的，但也有一些人给人造成不好的印象。因此有的教授对中国学生难免有看法，所以我刚到就马上要考我。当时我毫无准备，因为刚到美国，觉得换了一个天地，先玩了两天，没想到会要考我。那天我上午 9 点到办公室，莱夫谢茨(S. Lefschetz)给了我一份综合试卷，涉及众多数学分支。我花了好几个小时，当天傍晚交上了答卷。结果，因为考得很不错，教授们的态度就大不一样了。

访：请您谈谈对当时普林斯顿的印象。

段：我到那里时，普林斯顿正处于蓬勃发展、富有生气的全盛时期。由于德国数学已被纳粹毁得差不多了，普林斯顿确实成了世界数学中心，数学系师资力量很强。当时在系里任教的有著名代数学家韦德伯恩(J. H. M. Wedderburn)；谢瓦莱(C. Chevally)则是系里 30 多岁的年轻助教授，在学术上已十分活跃。著名的普林斯顿高等研究院则荟萃了爱因斯坦(A. Einstein)，外尔(H. Weyl)，冯·诺伊曼(J. von Neumann)，泡利(W. Pouli)，西格尔，哥德尔(K. Gödel)等著名学者。

访：普林斯顿大学跟普林斯顿高等研究院之间是什么关系？

段：关系十分密切，可以说难以区分。大学数学系和研究院相距不远，而且有班车来往。学术研究方面是相通的，许多学术活动双方人员都可自由参加。我就在两边听课并参加讨论班。如听过外尔的代数数论、二次型的算术理论；谢瓦莱的代数几何基础、积分方程；西格尔的解析数论、超越数论；莱夫谢茨的拓扑；丘奇(A. Church)的逻辑课，等等。

师从 Brauer，"有限群表示"

访：您的博士导师仍是布饶尔教授吧？您的博士论文是怎样选题的，其主要成果是什么？

段：我的导师仍是布饶尔。前面说过，有限群的模表示论研究有限群在特征为素数 p 的域上的表示。当 p 整除群阶时，则与通常的有限群在特征 0 域上的表示有很大不同，其理论更深刻、复杂。布饶尔教授在 1942 年发表了关于阶恰含某素数的一次幂的有限群的重要论文。我的博士论文就是对这方面工作的研究，论文题目是"论阶恰含某素数的一次幂的有限群"(On groups whose orders contain a prime number to the first power)。

我在以博士论文为核心的几项工作(有的完成于博士论文前)中，得到了下述主要结果：(1)得出阶为 pq^bm 的某些单群的结构，其中 p 和 q 为互异素数，b 和 m 为正整数，$m \leqslant p-1$；

(2)证明了 L. E. Dickson 的《线性群》一书中的单群表直到 10,000 阶是完全的；

(3)确定了 pg' 阶的线性群的构造，其中 p 为素数，且 $(p, g') = 1$，维数 $\leqslant \frac{2p+1}{3}$。

访：我们知道，您的这些成果，在 20 世纪 80 年代仍被详细地写入有关群论的著作，如 1982 年费特(W. Feit)在他的专著《有限群的表示理论》(*The representation theory of finite groups*. North - Halland, 1982)中就完整地叙述了您的成果，可见您的博士论文及相关工作的影响与意义。

段：围绕博士论文，尤其为得到上述那些结果，我对模表示论的一些基本事实进行了研究，如确定了 pg' 阶群的 p - 块的布饶尔树的重要性质。我跟导师布饶尔一起还证明了三个引理。

访：就是实际上可称为布饶尔—段—斯坦顿(Brauer - Tuan - Stanton)原

则。布饶尔—段指标块分离原则和布饶尔—段定理的三个成果吧。

段：我们合作的这些成果，后写成论文于 1945 年发表在《美国数学会会刊》(On simple groups off inite orderI, Bull、Amer. Math. Soc, 51(1945), pp. 756—766)，后又被收入《布饶尔选集》第一卷。

访：您的博士论文发表于哪年？

段：我是 1943 年获普林斯顿大学哲学博士学位的。博士论文 1944 年刊于美国《数学年刊》第 2 期(Ann. Math, 45(2)(1944), pp. 110—140)。

访：您后来有没有继续博士论文中开始的工作？

段：说来话长。后来我和我的学生作了进一步的研究。王萼芳研究了阶 $p \leqslant 27,000$ 的有限单群，弄清了这一类单群的结构。1954—1955 年，1964—1966 年在北京举办了两期关于有限群模表示论的讨论班，其中洪加威、李慧陵取得了很好的成果，决定了一些特殊类型的单群。20 世纪 80 年代，我的博士研究生张继平用单群分类定理和表示论彻底解决了维数 $< p$ 的复线性群的结构问题(Zhang Jiping, Complex linear groups of degrees at most $p-1$, Comtemp. Math. Vol. 82, Amer. Math. Soc. 1989, pp. 243—254)。在某种意义上布饶尔、我和张继平的工作可看作是一个连续的系列，问题最早是布饶尔提出的。后来陆续引进了许多新方法，而使问题得到了解决。

携手 Chevalley，“李群李代数”

访：获博士学位后您继续留在普林斯顿大学搞研究吗？

段：1943 年得博士学位后，我继续留校做了两年博士后。两年间，我任数学系研究助理(Research Associate)，还曾到阿廷(E. Artin)那儿作过几个月的短期访问。从 1945 年 9 月起，我从大学转到普林斯顿高等研究院工作，担任外尔的助手，直到我 1946 年回国。

访：我们知道，您跟法国著名的布尔巴基学派的主要成员谢瓦莱进行过合作研究，是不是也在普林斯顿时期开始的？

段：谢瓦莱比我大不了几岁。我到普林斯顿后的第二个学期起，开始听他的课。听了一学期的积分方程，还听过他的代数数论、代数几何、李群等。谢瓦莱的研究兴趣相当广，甚至还写过一些哲学、逻辑学方面的论著。由于开始时我主要学数学方面的基础课，所以在 1943 年前跟他的个人接触并不多。

访:看来您是在得博士学位后才跟谢瓦莱合作的。

段:合作是从 1943 年开始的。当时我跟安布罗斯(W. Ambrose)等一起参加一个讨论班,主要内容就围绕谢瓦莱关于 Lie 群的著作,大家提出研究报告。我于 1943,1944 年报告过两次。这样就开始了跟谢瓦莱的合作,开始研究代数 Lie 群和代数 Lie 代数。

访:您在这方面的工作,以及您跟谢瓦莱的合作研究成果,能不能作一简要介绍?

段:谢瓦莱在 1943 年发表了一篇论文"矩阵间的一种新关系"(A new kind of relationship between matrices, Amer. J. Math, 65(1943), pp. 521—532),引进了利用矩阵的张量不变量而得到的矩阵复形的定义,并在其中的定理 6 中刻画了幂零矩阵的复型:在特征零的域上任意幂零矩阵 Z 的复型 Z' 都是 Z 的数量倍数。我对这个定理做了改进。

接着我们开始了在代数 Lie 代数方向上的合作。n 级一般线性群 $GL_n(C)$(C 为复数域)的一个子群称为代数的,如果 $GL_n(C)$中一个矩阵 σ 属于一个复 Lie 群 A 的条件可以通过 σ 的系数的一组代数方程来表达。显然,决定哪些李代数可以作为代数的 Lie 群的 Lie 代数,具有很重要的意义。在某种意义下,这个问题已为莫瑞尔(L. Maurer)在 1894 年解决了。经过我和谢瓦莱的研究,我们得出:如果定义代数的 Lie 代数为一个包含其中任意元素的所有复型的矩阵 Lie 代数,则这样定义的 Lie 代数恰是莫瑞尔在 1894 年所研究的代数的 Lie 群的 Lie 代数。这个等价关系是代数群中的基本定理。

访:这个重要结果是什么时候得到的,发表在哪一年?

段:1945 年,我们发表了一篇论文摘要:"关于代数的 Lie 代数"(On algebraic Lie algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 31(1945), pp. 195—196)概述了我们合作研究的证明线索。1946 年由于我回国,与谢瓦莱的联系中断了。后来跟他联系上后,征求了他的意见,他同意在中国发表。这样,时隔 6 年之后,我们合作的论文全文于 1951 年在中国的《数学学报》上发表了。标题是"代数的 Lie 代数及其不变量"(Algebraic Lie algebras and their invariants)。

这个定理的正方向证明比较直接,而反方向证明相当迂回。证明中我们引进了一些新的有用的概念,得到一些值得注意的结果。如,根基由幂零矩阵组成的矩阵 Lie 代数由其不变量所决定,矩阵 Lie 代数换位子代数——

特别是半单纯矩阵 Lie 代数——就是这种代数。

访：由于您与谢瓦莱得到了上述基本定理，因而可以用 Lie 代数的方法将代数 Lie 群推广到特征零的任意域上。法国著名数学家波莱尔(A. Borel)曾说，"(20 世纪)40 年代中期谢瓦莱和段学复用 Lie 代数的方法把代数 Lie 群推广到特征零的任意域上，这是 1955 年线性代数群一般理论诞生的前奏。"足见这项工作的份量。

段：我还要告诉你们，我们发表论文摘要(1945 年)和全文(1951 年)之间，日本的两位数学家松岛(Gotô)和后腾守邦(Matsushima)在 1948 年用另外的方法对我们的基本定理给出了证明。

访：您和谢瓦莱的私人交往如何？

段：我和他关系十分密切，很友好。有时，他把他的办公室让我晚上单独使用。他很喜欢下围棋，记得他有时十分有趣，碰上他不用心下棋而下得很糟时，就会把棋盘给掀了。我还教他写过中文。我回国后在 1951 年左右跟他恢复了通信。朝鲜战争后通信又中断。"文革"中北大数学系一位教员去法国见到他，他很关心地问起了我，后给我写过一封信。20 世纪 80 年代初，他托莫斯托夫(Mostoff)给我捎来他的相片。1984 年我组织北京国际群论会议，邀请他来中国。他回信表示因健康等原因不能来。没想到，我主持的那次国际会前夕，这位大师去世了。最近我看到他女儿(Kathrane Challey)写的一篇谢瓦莱传，又勾起了我对他的思念。

Weyl、Artin，师情友谊长

访：现在请您谈谈给外尔做助手的经历。

段：我在高等研究院做外尔的助手，主要是协助他开群论课，这是为研究生开的，他讲的大都是群论研究中的最基本的结果。他讲课非常有特色，不光讲理论，更主要的是通过各种具体问题来讲群论，讲群论与物理及其它方面的联系，如离散群、晶体结构等。

访：外尔有一部后来成为经典的名著《典型群》(*Classical Groups*, PrincetonUniv. Press, 1939)。他讲课用它做教材吗？

段：有时用。我给他当助手的一项重要工作就是协助他修订这部书，主要帮他写群论的最新进展与成就。我还听了他讲的不少课，如二次型的算术理论；参加他办的几个讨论班。受到他广博的数学知识和修养的熏陶，受

益匪浅。我打算回国时，他曾多次挽留我。

访：您回国后跟外尔还有接触吗？

段：1955 年 10 月我去瑞士参加一个纪念大会。他当时已在瑞士居住。离开瑞士的前一天我给他家里打电话，他恰好刚从梵蒂冈领奖回来，热情邀我去他家并请我在家吃晚饭。好友相见，非常高兴。记得他对中国的建设十分关注，友好地询问："为什么中国不买外国汽车，这样不仅便宜而且质量好得多。"我用那个时代的思想作了个得体的回答："如果我们中国总是买汽车，那么就永远也不可能发展起中国的汽车工业了！"外尔听了表示能够理解。当然，现在我们知道，我们可以买外国汽车，也可以引进国外的生产线。

1955 年冬外尔就去世了。他的家人给我发了一个讣告。我很怀念这位 20 世纪的数学大师。

访：您说过您去阿廷教授处访问过几个月。

段：阿廷本是德国数学家，在哥丁根与著名女数学家诺德(E. Noether)一起创立了现代意义上的抽象代数学，二次大战前与诺德一样到了美国。当时他在印第安纳的一所大学教书，讲伽罗瓦理论；可以讨论数学的人很少。因布饶尔很推崇他，1945 年我得到华美协进会的一项资助，在阿廷处访问了 4 个月。

访：他当时一定很孤独，您去了他大概很高兴吧！

段：是的。我经常和他一家人去郊游，跟他的孩子们也很好。我跟阿廷教授一起讨论了很多问题，其中一个与曾炯研究的问题有关。跟他讨论使我开阔了眼界。

访：您为什么不在阿廷那里多呆一段时间呢？这是很难得的机会。

段：原因之一是阿廷那里无法提供资助，我又不喜欢用华美协进会的钱，所以不愿再得到它的资助。另一个重要原因是，我与谢瓦莱的合作还在继续。1946 年我回国前，专门去印第安纳向阿廷老师辞行。那时他也已决定到普林斯顿去了。

重返清华，"代代代主任"

访：抗战胜利后不久，您就准备回国。当时的心情怎么样？

段：抗战胜利，我十分高兴，并准备回国。外尔再三挽留，但我想念祖国和清华园。在我们那一辈留学生看来，学成回国是理所当然的事，不会为是

否回国产生什么思想斗争。当时“进出自由”，不仅学术资料交流很方便，而且清华还规定：教授服务7年可以出国休假一年，或进修或进行研究。我并不觉得回国会对自己的前途和学术发展构成什么障碍。

访：您是什么时候回到清华园的？

段：我1946年7月在旧金山登船，8月间抵达上海。见到了专程从西安赶到上海接我的母亲及妻子。见到了正准备携全家赴美任教的华罗庚教授，我们还一起参加了闻一多、李公朴两位烈士的追悼会。见到了正在筹建中央研究院数学研究所的陈省身教授。陈省身给了我热情的帮助，安排我母亲、我们夫妇住在上海岳阳路当时的中央研究院宿舍；并聘我做数学研究所的兼任研究员，负责指导毕业于浙江大学去做助理员的曹锡华。

1946年10月，我回到了阔别9年的清华园。被聘为数学系教授。

访：您是不是回清华不久，就担任数学系主任的？

段：不。我是在1947年担任代理系主任的。这纯属偶然，实乃历史之巧合。在国外留学期间，每与中国同学论及回国后的工作，我都认为自己只适应于做一个教授，绝不会干行政、管理方面的事。我说过，清华数学系差不多同样年龄的学者中，陈省身、华罗庚等先生都比我有组织才能。可想不到回国不到一年就叫我代理系主任职务。

访：听说您当时曾给自己题了一副对联：

“代代代主任

新新新南院”

能解释一下吗？

段：“代代代主任”是指当时代理系主任的情况。本来清华数学系系主任是杨武之教授，抗战胜利后清华迁回北京，他因病滞留昆明。学校于是找了几位先后代理系主任。我刚回清华时正值赵访熊教授代系主任。1947年赵先生出国，才由我代赵先生。下联是指我当时在清华的住宅的位置。清华的赵南院被称为“旧南院”，新林院称为“南院”，新林院南边是普吉院，我家住在普吉院南边的胜因院。这几个院一字排开，因此我戏称自家住宅是“新新新南院”。

访：看来您少年时学习写对联和诗词的技巧，确实给您的生活增添了情趣。现在请您谈谈1952年院系调整前，您都在清华抓了哪些工作？

段：教学任务很重。在1946至1948年的两个学年里，我连续开设了高等代数、高等微积分、近世代数等课程。其中高等微积分一度是为数学、物

理两系及电机工程系电讯专业的学生开设的。另外,我还应北师大傅种孙教授之邀,在北师大数学系兼课。

在1946—1947学年,我指导应届毕业生万哲先撰写毕业论文。1947年上半年又指导曹锡华学习抽象代数、模表示论。1948年下半年,我把曹锡华推荐到美国密执根大学我的导师布饶尔那里做博士研究生。由于在北师大兼课,所以教过那里的学生王世强和刘绍学等。

我做的另一件事是为系里聘请老师。1946—1948年间,先后请北大的许宝騄、申又枨和庄圻泰等教授来清华兼课。1948年聘请师从英国蒂奇马什(E.Titchmarsh)教授、获牛津大学博士,后在普林斯顿高等研究院工作一年的闵嗣鹤先生来清华执教。

当时正值政局急剧变化,我和不少教师一样,对学生开展的反饥饿、反内战、争民主的运动给予了同情和支持。

访:您是什么时候被任命为数学系主任,去掉那个"代"字的?

段:1948年12月13日,清华园先于北平城而解放了。但在1949年1月,我第一次肠胃出血,我和家人都十分着急,不得不住进协和医院,到3月才治愈出院,回到系里即被学校正式任命为系主任。1950年春,华先生从美国回到清华数学系,同时回来的程民德先生也被聘到清华数学系任教。我还聘请了刚获美国哈佛大学博士学位归国,在北大任教的王湘浩来系兼课。从1949年至1952年,在全系教师的共同努力下,清华数学系为我国培养了一批后来成为各方面骨干的优秀人才。如在代数学及相关领域就有万哲先,丁石孙,曾肯成,裘光明,王萼芳等。

院系调整,燕园育英才

访:1952年,国家对高等院校做了大规模的院系调整。原北京大学、清华大学和燕京大学三校组建起新的北京大学——文理科综合大学和新的清华大学——多科性工业大学。您被任命为北京大学数学力学系教授,并兼任系主任。看来命运不让您从行政工作岗位上下来。

段:1952年暑假前,我们每人都填了分配志愿表,大家都表示愿意去新建或外地院校。我也填了愿到北大任教,但当系主任则是没预料到的。我的确想到规模加大许多的北京大学数学力学系的担子不会轻松,尤其还有自己不熟悉的力学专业。但当我的老师周培源教授正式通知我这一任命

时，除了想到力学方面的工作可得到周培源先生的指导和帮助外，还有一种更重要的为人民服务、一切为了祖国的思想和责任感，不容我对组织的安排推辞。所以我只是对周先生说，感谢组织和周老师的信任，一定要努力作好工作，就此应允下来。

访：这样，您就干了 30 年北京大学的系主任，这真是一项相当吃力的工作。我们知道其中必有说不尽的酸甜苦辣。请先谈谈学习苏联的大致情形。

段：院系调整后，全面学习苏联是整个工作的特色。北大数学力学系从教学目的，教学计划、大纲，甚至系的名称都向莫斯科大学学习。首先是培养目标。苏联莫斯科大学数学专业教学计划明确规定，培养目标是数学家。不管学生毕业后做什么工作——研究工作者或是高等学校教师……培养目标都一个样，是数学家，以此来保证质量。于是在课程设置、大纲、教材上都体现这一目标。这对北大数学系有很重要的影响。多年以来，除少数不正常的年月外，我们的目标也是培养数学家，只是后来改为数学工作者的提法罢了。基础课程就长期定为 12 至 14 门。

为了向苏联学习，我们都积极学习俄语，大量翻译苏联数学教材，这些译本在国内影响都比较大。大约到 20 世纪 60 年代前半期，系里教师自编的质量较好的教材相继告成使用，才结束了主要靠翻译使用苏联教材的局面。

在学习苏联教学方法方面，数学基础课都规定有较多的习题课。如大一数学分析每周上课 4 小时，习题课也是每周 4 小时，而且是将大班分成三四十人的小班进行。这种严格地上习题课的教学方法，对保证和提高学习质量起了重要作用。

我们还学习苏联成立了教研室。最先成立的是数学分析与函数论教研室，作为试点来摸索经验。随后几乎每个教师都归属一个教研室。数学方面有六个教研室：数学分析与函数论、几何与代数、微分方程、概率论与数理统计、高等数学、计算数学，力学方面有三个：一般力学、流体力学和固体力学。此外，还有一个风洞实验室和一个计算机实验室。

访：苏联数学继承了俄罗斯数学传统，我国在院系调整前受欧美影响较多。院系调整后必然会在教学中反映出这方面的变化。

段：的确如此。首先从侧重点来说，苏联数学专业的教学计划中，分析方面的基础课占有主流地位。我们当时确定全国的数学研究战略，也将分

析作为主流,北大也是如此。微分方程以前在我国是相对薄弱的领域,此时提出要特别重视。同时,从学习苏联及我国发展数学的规划出发,提出概率统计、计算数学也应注意。旧北大和清华研究力量较分散,不得不采取一些措施。经过动员和部署,老教师申又枨、徐献瑜教授分别转向微分方程、计算数学。而许宝騄教授在当时差不多是全国仅有的概率统计专家,便承担了培养这方面学者的任务。在中青年教师中,在微分方程、概率统计、计算数学等方面各选了一人去苏联留学进修。他们是周毓麟、江泽培和吴文达。

访:经过几十年的发展,回过头来看当时全面学习苏联,您有何感想?

段:当时这样做是别无选择。那时欧美等西方国家封锁我们国家,甚至都在朝鲜打起来了;各种基本交流差不多都中断了。而我们底子薄,需要借助于帮助,只有苏联等东欧国家能帮我们。而且就数学来说,苏联也的确不错。今天看待这个问题,必须考虑当时的实际情况。

访:北大数学系几十年来培养了许多优秀的人材,您觉得哪些措施是成功的?

段:在 1952 年以后直至 20 世纪 60 年代的较为正常的时期,除了较严格地按照教学大纲、教学计划进行教学外,还采取了其他一些措施。如曾在高年级设“专门化”,举办有关课题的讨论班,在“专门化”课程中让学生适当接触数学前沿工作,进而撰写毕业论文。这样做效果比较好。当然,能开设“专门化”,跟学制不止四年有关,如有时是五年,56,57,58 三届大学生学制还曾改为六年。这样就有了时间保证。使学生能深入钻研一些数学问题,这些学生中的优良生,水平已与研究生相近。

访:代数专门化课是哪年开始的?

段:开始是在 1955 年,为 1952 级学生开设的,记得念代数专门化的有许以超、沈光宇等。在 1954 级念代数专门化的学生中,我选拔石生明做我的研究生,1962 年他完成了典型群表示论方面的论文。

访:在您担任北大数力系主任期间,系里培养了许多数学人才,有的已成为中国科学院的学部委员,可谓是桃李满天下。在这期间,数学界也经历了好多次动荡,您在这方面的体会一定很深。

段:是的。记得在 1972 年的一天,周培源教授给我看了周恩来总理关于应该加强基础研究的批条。在随后召开的落实总理批示的会议上,我当着北大诸多头面人物的面,说出了我对从 20 世纪 50 年代至当时的科技方面的政策的看法。我把多次反复概括为“四次反复,八次变换”。

访：这个提法很新鲜，还有数学味儿。请详细解释一下。

段：这里既有全国性的反复，也有北大本身的一些特殊情况。第一次反复是，1952年院系调整后，强调高校应全力搞好教学，认为搞科研是为名为利，导致了轻视科研；到1953年夏季的青岛会议，提出综合性大学也应加强科研。这是第一次反复中的两次变换。第二次是：1958年"大跃进"时大搞"实践"，使科研和教学受到极大冲击；1959年，北大提出理论研究也应受到重视，从而减轻了大跃进对科研的冲击。这是第二次反复中的两次变换。第三次：1960年开始，理论研究又受到责难，甚至教学也受到阻碍；1962年广州会议后，科研与教学开始受到一定程度的重视。这是第三次反复中的两次变换。第四次反复从1966年的"文化大革命"开始，情况就不用说了；1972年又重提重视基础理论。

访：在"文化大革命"期间这样讲，恐怕有点"大逆不道"。反响如何？

段：与会者和部分教员对这种说法有点震惊，不少人也有同感。可是，会后没多久，迟群派人来警告我，不要再讲"四次反复、八次变换"了。我认为，从20世纪50年代初到20世纪70年代末，数学方面的这种反复，并不是数学家本身对纯数学与应用数学关系的争论的结果，而是各种政治运动对数学的影响所致。

访：就数学本身而论，您对理论研究和应用的关系如何看？

段：数学研究在理论与应用方面有其自身的规律。英国数学家哈代曾说，只有没有任何实际应用的数学才是好数学；对此，我是不赞成的。从20世纪50年代以来，基础数学发展得很快，但应用数学发展得更快。代数中的许多工作，既有理论意义，又有实际意义，很难分开。现在除基础数学的许多分支外，应用数学也出现了一大片的各种分支。以我们系为例，从20世纪70年代起，首先是力学分出去独立成系，然后信息领域分出去独立了，前不久概率统计专业也独立出去成系了。

访：您怎么看这种分化？

段：这种分化不随人的意志而转移，是数学自身的发展的要求。实际上是国际数学发展中科研方向的转变的反映。虽然有了分化，但绝不是以前的那种来回摇摆。

访：您对理论研究与应用的关系发表了很好的看法。我们知道北大数学系和您本人在应用数学方面也有极好的工作，因时间关系，暂不深谈了。下面让我们谈谈您辞去系主任职务的事。

战胜癌魔，耆年献余热

访：您在20世纪80年代初，主动辞去北大数学系系主任的职务，为不少人称道，请谈谈当时的想法？

段：我总是认为，必须打破干部终身制，事业才能不断前进。1981年上半年，我经过长时间的观察和思考，见到了推举丁石孙同志为新系主任的可能：一是打破终身制正取得大家的共识，而丁石孙在数学系工作多年，他的成绩在各方面都获得了认可。于是，我主动辞职，并推荐丁石孙继任。我的辞职请求得到校领导和系里同志的赞成。经选举丁石孙接任系主任。他干得很不错，受到系内外好评，后来又担任北大校长，在校内外获得好的声誉，我感到十分高兴。

访：从当"代代代主任"起到1981年，整整当了34年系主任，您卸任之后是什么感受？

段：卸任之后，感慨万千。当时做了一首诗，可反映那时的心情：

三十四年系主任，
几度沧桑两鬓斑。
举贤辞位奋余生，
桃李天下慰心田。

访：我们知道，从20世纪50年代初，您曾数次发作严重的胃肠溃疡病。1959年夏就做了直肠癌切除手术。实际上您一直是带病工作，而且工作量很大，能谈谈您的养生之道吗？

段：养生之道谈不上。从1959年到现在，30多年了。我始终保持乐观，不认为癌症就是绝症。我自己总结了对待疾病的几句话：开阔胸怀，适度运动，战略藐视，战术重视，综合治疗，促进健康，老有所为，为祖国再做贡献。

访：很了不起！您卸任后还在带研究生？

段：卸任后，我在其他同志协助下集中力量培养研究生。岁月不饶人，年纪大了，尤其是从1989年起身体更差了些，但我还是争取多做一些力所能及的工作，发挥余热。"得天下英才而教育之，一乐也"，这是我的信念。

访：祝您健康长寿！

编者注：此文原载于《数学的实践与认识》1994年第四期第57—74页。