第二章　原子的能级和辐射

2.1 试计算氢原子的第一玻尔轨道上电子绕核转动的频率、线速度和加速度。

解：电子在第一玻尔轨道上即 n=1。根据量子化条件，

$$p_{\phi} = mvr = n\frac{h}{2\pi} \qquad r = a_1 = 0.529\times10^{-10}m$$

可得：频率 $\nu = \dfrac{v}{2\pi a_1} = \dfrac{nh}{2\pi m a_1^2} = \dfrac{h}{2\pi m a_1^2}$

$$= 6.56\times10^{15}s^{-1}$$

速度：$v = 2\pi a_1 \nu = h/ma_1 = 2.188\times10^6$ m/s

加速度：$w = v^2/a_1 = 8.98\times10^{22}$ m/s^2

2.2 试由氢原子的里德伯常数计算基态氢原子的电离电势和第一激发电势。

解：电离能为 $E_i = E_\infty - E_1$，把氢原子的能级公式 $E_n = -Rhc/n^2$ 代入，得：

$$E_i = R_H hc(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty}) = Rhc = 13.60\text{eV}。$$

电离电势：$V_i = \dfrac{E_i}{e} = 13.60$ V

第一激发能为将电子从 n=1 的能级激发到 n=2 的能级上所需要的能量：

$$E_i = R_H hc(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}) = \frac{3}{4}Rhc = \frac{3}{4}\times13.60 = 10.20\ \text{eV}$$

第一激发电势：$V_1 = \dfrac{E_1}{e} = 10.20$ V

2.3 用能量为 12.5 电子伏特的电子去激发基态氢原子，问受激发的氢原子向低能基跃迁时，会出现那些波长的光谱线？

解：由氢原子能级公式：$E = -hcR_H/n^2$ 得：

$E_1 = -13.6eV$，$E_2 = -3.4eV$，$E_3 = -1.51eV$，$E_4 = -0.85eV$

可见，具有 12.5 电子伏特能量的电子只能激发 H 原子至 $n\le 3$ 的能级。跃迁时可能发出的光谱线的波长为：

$$\frac{1}{\lambda_1} = R_H(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}) = 5R_H/36 \Rightarrow \lambda_1 = 6563\overset{o}{A}$$

$$\frac{1}{\lambda_2}=R_H(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})=\frac{3}{4}R_H \Rightarrow \lambda_2=1215\overset{o}{A}$$

$$\frac{1}{\lambda_3}=R_H(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2})=\frac{8}{9}R_H \Rightarrow \lambda_3=1025.7\overset{o}{A}$$

2.4 试估算一次电离的氦离子 H_e^+、二次电离的锂离子 L_i^+ 的第一玻尔轨道半径、电离电势、第一激发电势和赖曼系第一条谱线波长分别与氢原子的上述物理量之比值。

解：估算时，不考虑原子核的运动所产生的影响。

a）氢原子和类氢离子的轨道半径：$r=\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2 n^2}{4\pi^2 mZe^2}=a_1\frac{n^2}{Z}, n=1,2,3\ldots\ldots$

对于 $H, Z=1$；对于 $H^+{}_e, Z=2$；对于 Li^{++}，$Z=3$；

$$\frac{r_{He^+}}{r_H}=\frac{Z_H}{Z_{H_e^+}}=\frac{1}{2},\qquad \frac{r_{Li^{++}}}{r_H}=\frac{Z_H}{Z_{Li^{++}}}=\frac{1}{3};$$

b）氢和类氢离子的能量公式：

$$E=-\frac{2\pi^2 me^4 Z^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2 h^2}=E_1\cdot\frac{Z^2}{n^2}, n=1,2,3\ldots\ldots$$

电离能之比：

$$\frac{0-E_{He^+}}{0-E_H}=\frac{Z_{He}^2}{Z_H^2}=4,\qquad \frac{0-E_{Li^{++}}}{0-E_H}=\frac{Z_{Li^{++}}^2}{Z_H^2}=9$$

c）第一激发能之比：

$$\frac{E_{He}^2-E_{He}^1}{E_H^2-E_H^1}=\frac{E_1\frac{2^2}{2^2}-E_1\frac{2^2}{1^2}}{E_1\frac{1^2}{2^2}-E_1\frac{1^2}{1^2}}=4\qquad \frac{E_{Li}^2-E_{Li}^1}{E_H^2-E_H^1}=\frac{E_1\frac{3^2}{2^2}-E_1\frac{3^2}{1^2}}{E_1\frac{1^2}{2^2}-E_1\frac{1^2}{1^2}}=9$$

d）氢原子和类氢离子的赖曼系第一条谱线的波数为：

$$\tilde{v}_1=Z^2R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})=\frac{1}{\lambda}$$

因此，$\frac{\lambda_1^{He+}}{\lambda_1^H}=\frac{1}{4},\qquad \frac{\lambda_1^{Li++}}{\lambda_1^H}=\frac{1}{9}$

2.5 试问二次电离的锂离子 L_i^{++} 从其第一激发态向基态跃迁时发出的光子，是否有可能使处于基态的一次电离的氦粒子 H_e^+ 的电子电离掉？

解：L_i^{++} 由第一激发态向基态跃迁时发出的光子的能量为：

$$9hcR_\infty(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty})=\frac{27hcR_\infty}{4}$$

${H_e}^+$ 的电离能量为：$v_{He^+}=4hcR_\infty(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty})=4hcR_\infty$

所以能将 ${H_e}^+$ 的基态电子电离掉。

2.6 氢与其同位素氘（质量数为 2）混在同一放电管中，摄下两种原子的光谱线。试问其巴耳末系的第一条（H_α）光谱线之间的波长差 $\Delta\lambda$ 有多大？已知氢里德伯常数 $R_H=1.0967758\times10^7\text{m}^{-1}$，氘的里德伯常数 $R_D=1.0970742\times10^7\text{m}^{-1}$。

解：$\frac{1}{\lambda_H}=R_H(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})$，$\lambda_H=36/5R_H$

$\frac{1}{\lambda_D}=R_D(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2})$，$\lambda_D=36/5R_D$

$$\Delta\lambda=\lambda_H-\lambda_D=\frac{36}{5}(\frac{1}{R_H}-\frac{1}{R_D})=1.79\overset{o}{A}$$

2.7 已知一对正负电子绕其共同的质心转动会暂时形成类似于氢原子结构的“正电子素”。试计算“正电子素”由第一激发态向基态跃迁发射光谱的波长 λ 为多少 $\overset{o}{A}$？

解：先计算电子偶的 R：

$$R=R_\infty\frac{1}{1+\frac{m}{m}}=R_\infty/2$$

由 $\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2})=\frac{3}{4}R_\infty$

得：$\lambda=\frac{8}{3R_\infty}=\frac{1}{3\times10973731}\text{米}=2430\overset{o}{A}$

2.8 试证明氢原子中的电子从 n+1 轨道跃迁到 n 轨道，发射光子的频率 ν_n。当 n>>1 时光子频率即为电子绕第 n 玻尔轨道转动的频率。

证明：在氢原子中电子从 n+1 轨道跃迁到 n 轨道所发光子的波数为：

$$\tilde{v}_n=\frac{1}{\lambda_n}=R[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]$$

频率为：$v_n=\frac{c}{\lambda}=Rc[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}]=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}Rc$

当 n>>1 时，有 $(2n+1)/n^2(n+1)^2\approx 2n/n^4=2/n^3$，所以在 n>>1 时，氢原子中电子从 n+1 轨道跃迁到 n 轨道所发光子的频率为：$v_n=2Rc/n^3$。

设电子在第 n 轨道上的转动频率为 f_n，则

$$f_n=\frac{v}{2\pi r}=\frac{4\pi^2me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2n^3h^3}\qquad R=\frac{v}{2\pi r}=\frac{2\pi^2me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\ ch^3}$$

因此，在 n>>1 时，有 $v_n=f_n$。在 n 很大时，玻尔理论过渡到经典理论，这就是对应原理。

2.9 Li 原子序数 Z=3，其光谱的主线系可用下式表示：

$\tilde{v}=\frac{R}{(1+0.5951)^2}-\frac{R}{(n-0.0401)^2}$。已知锂原子电离成 Li^{+++} 离子需要 203.44 电子伏特的功。问如把 Li^{+} 离子电离成 Li^{++} 离子，需要多少电子伏特的功？

解：第一步，计算 Li 原子电离成 Li^{+} 离子所需要的能量：

$$E_1=\frac{Rhc}{(1+0.5951)^2}-\frac{Rhc}{\infty}\approx\frac{R_\infty hc}{(1+0.5951)^2}=5.35\text{eV}$$

第二步，$Li^{++}\rightarrow Li^{+++}$ 时所需要的能量，此时 Li^{++} 是类氢离子，可用氢原子的能量公式，电离能 E_3 为：$E_3=\frac{Z^2Rhc}{1^2}\approx Z^2R_\infty hc=9\times 13.6=122.4eV$。

第三步，设 $Li^{+}\rightarrow Li^{++}$ 的电离能为 E_2。$Li\rightarrow Li^{+++}$ 需要的总能量是 E=203.44eV，所以有 $$E_2=E-E_1-E_3=75.6\text{eV}。$$

2.10 具有磁矩的原子，在横向均匀磁场和横向非均匀磁场中运动时有什么不同？

解：设原子的磁矩为 μ，磁场沿 Z 方向，则原子磁矩在磁场方向的分量记为 μ_Z，于是具有磁矩的原子在磁场中所受的力为 $F=\mu_Z\frac{\partial B}{\partial Z}$，其中 $\frac{\partial B}{\partial Z}$ 是磁场沿 Z 方向的梯度。对均匀磁场，$\frac{\partial B}{\partial Z}=0$，原子在磁场中不受力，原子受力矩

作用绕磁场方向做拉摩进动，而原子的运动路径不改变。对于非均磁场，$\frac{\partial B}{\partial Z} \neq 0$，原子在磁场中不仅受到力矩作用，还受到力的作用，原子束的路径要发生改变。

2.11 史特恩-盖拉赫实验中，处于基态的窄银原子束通过不均匀横向磁场，磁场的梯度为$\frac{\partial B}{\partial Z} = 10^3$特斯拉/米，磁极纵向范围$L_1$=0.04 米(见图 2-2)，从磁极到屏距离$L_2$=0.10 米，原子的速度$v = 5\times10^2$米/秒。在屏上两束分开的距离$d = 0.002$米。试确定原子磁矩在磁场方向上投影$\mu$的大小（设磁场边缘的影响可忽略不计）。

解：银原子在非均匀磁场中受到垂直于入射方向的磁场力作用，其轨道为抛物线；在L_2区域粒子不受力作惯性运动。

原子通过 L_1 和L_2 的时间 $t_1 = L_1/v$，$t_2 = L_2/v$

通过L_1段时原子受力 $f_z = \mu_z \times \partial B/\partial z$，方向因$\mu_z$方向的不同而不同，或者向上或者向下。

Z 方向原子的加速度 $a_z = f_z/m$

刚脱离磁场时原子Z方向的瞬时速度 $v_z = a_z \times t_1$

原子在 Z 方向的偏转位移 $d/2 = 1/2 \times a_z \times t_1^2 + v_z \times t_2$

代入数值计算得 $\mu_z = 0.93 \times 10^{-23}$ J/T= 1.007 μ_B,相当于一个玻尔磁子。

2.12 观察高真空玻璃管中由激发原子束所发光谱线的强度沿原子射线束的减弱情况，可以测定各激发态的平均寿命。若已知原子束中原子速度$v = 10^3$m/s，在沿粒子束方向上相距 1.5 毫米其共振光谱线强度减少到 1/3.32。试计算这种原子在共振激发态的平均寿命。

解：光谱线的强度与处于激发态的原子数和单位时间内的跃迁几率成正比。设发射共振谱线的跃迁几率为A_{21}，则有$\frac{I_1}{I_0} \propto \frac{A_{21}N_2}{A_{21}N_{20}} = \frac{N_2}{N_{20}}$

适当选取单位，使$\frac{I_1}{I_0} = \frac{N_2}{N_{20}} = 1/3.32$，并注意到 $N_2 = N_{20}e^{-t/\tau}$,而$t = S/v$，则有：

$\frac{N_2}{N_{20}} = e^{-t/\tau} = 1/3.32$，由此求得：

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{-t}{\ln(N_2/N_{20})} = \frac{s}{v\ln 3.32} = \frac{1.5\times10^{-3}}{10^3\times\ln 3.32}\\ &= 1.25\times10^{-6}\text{s}\end{aligned}$$